# 13 अप्राचल विधियाँ
# [NON-PARAMETRIC METHODS]

## टी-परीक्षण की परिसीमायें तथा अप्राचल विधियाँ
## (LIMITATIONS OF T-TEST AND NON-PARAMETRIC METHODS)

दो मध्यमानों के अन्तर की सार्थकता की जाँच के लिए प्रायः टी-परीक्षण (t-test) का व्यापक रूप से प्रयोग किया जाता है, परन्तु फिर भी इस परीक्षण की कुछ परिसीमायें हैं। पहले, टी-परीक्षण का उपयोग केवल उसी स्थिति में उपयुक्त रहता है, जबकि आँकड़ों का वितरण प्रसामान्य (Normal) हो। प्रायः उस स्थिति में, जबकि आँकड़ों के सम्बन्ध में प्रसामान्य वितरण (Normal Distribution) की उपधारणा (Assumption) नहीं रहती, तब टी-परीक्षण का उपयोग उपयुक्त नहीं रहता। दूसरे, टी-परीक्षण द्वारा एक समय पर केवल एक ही चर (Variable) का अध्ययन सम्भव रहता है। तीसरे, टी-परीक्षण का उपयोग बहुत कम निरीक्षणों (Observations) अथवा बहुत कम संख्या पर विश्वसनीय नहीं रहता।

इसके अतिरिक्त, टी-परीक्षण का सम्बन्ध जनसंख्या सम्बन्धी किसी एक विशेष शीलगुण अथवा प्राचल से रहता है, तथा उसके आधार पर जनसंख्या में उस शीलगुण अथवा प्राचल के सम्बन्ध में आकलन (Estimate) लगाया जाता है। इस कारण टी-परीक्षण तथा इसी प्रकार के अन्य परीक्षण, जैसे—प्रसरण-विश्लेषण (Analysis of Variance) का उपयोग ऐसे आँकड़ों से रहता है, जिनको हम जनसंख्या-सम्बन्धी आँकड़े (Parametric Statistics) कहते हैं। इस प्रकार के परीक्षणों के उपयोग की अपनी परिसीमायें हैं, अतएव अब हमें ऐसे परीक्षणों का अध्ययन करना पड़ेगा, जिनका सम्बन्ध अप्राचल सांख्यिकी (Non-parametric Statistics) से है।

## प्राचल तथा अप्राचल आँकड़ों का स्वरूप
## (NATURE OF PARAMETRIC STATISTICS AND NON-PARAMETRIC STATISTICS)

### प्राचल आँकड़े (Parametric Statistics)

प्राचल आँकड़ों का सम्बन्ध प्रायः एक समष्टि के किसी एक विशेष प्राचल (Parameter) से होता है। ऐसे आँकड़ों के आधार पर ही प्राचल के विषय में आकलन (Estimate) लगाया जाता है। इसी कारण ऐसे आँकड़ों को प्राचल (Parametric) आँकड़े कहा जाता है। अभी तक जिस प्रकार के आँकड़ों का अध्ययन मानक त्रुटि (Standard Error), टी-परीक्षण (t-test) तथा प्रसरण-विश्लेषण (Analysis of Variance) के आधार पर किया गया है, वे आँकड़े प्रायः प्रतिदर्श (Sample) के रूप में रहे हैं, तथा उनका सम्बन्ध सम्पूर्ण समष्टि (Universe) तथा प्रसामान्य वितरण (Normal Distribution) से रहा है। इसके अतिरिक्त, ऐसे मापों (Measurements) के आधार पर समूहों (Groups) की विशेषताओं (Characteristics); जैसे—बुद्धि (Intelligence), ऊँचाई (Height), बोध-विस्तार, योग्यता तथा अधिगम (Learning) आदि से रहा है, या फिर ऐसे द्वि-चर आँकड़ों

(Bivariate Data) से रहा है, जिनमें दो चरों (Variables) जैसे, ऊँचाई तथा भार व गति तथा शुद्धता के मध्य सह-सम्बन्ध गुणांक (Co-efficient of Correlation) के ज्ञात करने की आवश्यकता रही है। इस प्रकार के आँकड़ों को माप (Measurements) कहते हैं, क्योंकि उनके आधार पर समूह तथा उससे सम्बन्धित समष्टि (Universe) के प्राचल के विषय में आकलन (Estimates) लगाये जाते हैं, या फिर दो चरों के पारस्परिक सम्बन्ध (Mutual relationship) का अध्ययन किया जाता है। अतः माप-सम्बन्धी आँकड़ों को ही प्राचल आँकड़े (Parametric Statistics) कहते हैं।

## अप्राचल आँकड़े
## (NON-PARAMETRIC STATISTICS)

ऊपर बताये गये आँकड़ों के अतिरिक्त, प्रायः कुछ आँकड़े ऐसे भी होते हैं, जिनका सम्बन्ध ऐसी संख्याओं (Numbers) से होता है, जोकि दो या दो से अधिक संवर्गों (Categories) जैसे (Yes, No, तथा Indifferent), (सफल-असफल), (Very Unfavourable, Unfavourable, Indifferent, Favourable, Very Favourable) आदि में विभाजित रहते हैं। ऐसे आँकड़ों का सम्बन्ध प्रायः समाज के विभिन्न वर्गों तथा व्यक्तियों के अधिमानात्मक मूल्यों (Preferential values), किसी एक सामाजिक समस्या के प्रति समाज के व्यक्तियों की अभिवृत्तियों के मापन, विभिन्न प्रकार के विज्ञापनों की तुलनात्मक प्रभावशीलता, बाल्यकाल के अनुभवों का प्रौढ़ व्यक्तियों के मानसिक स्वास्थ्य पर प्रभावों आदि के अध्ययन से रहता है। स्पष्टतः ऐसे आँकड़ों का स्वरूप प्रतिचयन (Sampling) जैसे आँकड़ों से भिन्न (Different) रहता है, तथा ऐसे आँकड़ों का स्वरूप प्रायः वर्गित संख्याओं अथवा वर्गित आवृत्तियों (Classified Frequencies) में ही रहता है। ऐसे आँकड़ों में मध्यमान से विचलन (Deviations) की सार्थकता की जाँच किसी एक विशेष उपधारणा (Assumption) के आधार पर की जाती है। यहाँ यह उपधारणा प्रायः संयोग (Chance) ही होती है, परन्तु इसके अतिरिक्त इसका आधार प्रसामान्य वितरण (Normal Distribution) या अन्य कोई दूसरा सिद्धान्त (Assumption) या अनुपात (Ratio) भी हो सकता है। परन्तु यहाँ सार्थकता की कसौटी (Test of Significance) के आधार पर जनसंख्या के किसी एक प्राचल (Parameter) के विषय में आकलन (Estimate) नहीं लगाया जाता है। इसी कारण, इस प्रकार के आँकड़ों को अप्राचल सांख्यिकी (Non-parametric Statistics) कहा जाता है।

अप्राचल अथवा नान-पैरामीट्रिक आँकड़ों की एक विशेषता यह होती है कि ऐसे आँकड़ों की संख्या अपेक्षाकृत बहुत कम होती है, अथवा प्रायः तीस से कम ही रहती है। कभी-कभी इनकी संख्या 10 या इससे भी कम हो जाती है। यहाँ यह भी स्पष्ट है, कि ऐसे आँकड़ों का आधार न तो संयोगिक प्रतिचयन (Random Sampling) होता है, और न प्रसामान्य वितरण (Normal Distribution) ही। इस प्रकार अप्राचल आँकड़ों का स्वरूप अधिकतर पर्याप्त मात्रा में विषम (Skewed) होता है। ऐसे आँकड़ों में प्रायः धनात्मक विषमता या फिर, ऋणात्मक विषमता अवश्य रहती है, क्योंकि यहाँ आँकड़ों की संख्या बहुत कम होती है। ऐसे आँकड़ों का सम्बन्ध प्रायः एक समष्टि के प्राचल (Parameter) से भी नहीं होता। प्रसामान्यता अथवा प्रसामान्य वितरण के नियम भी इस विधि द्वारा प्राप्त निष्कर्षों पर लागू नहीं होते। यही कारण है कि अप्राचल सांख्यिकी (Non-parametric Statistics) को प्रायः वितरण-मुक्त सांख्यिकी (Distribution Free Statistics) भी कहते हैं।

## अप्राचल विधियाँ
## (NON-PARAMETRIC METHODS)

वितरण-मुक्त-सांख्यिकी अथवा अप्राचल सांख्यिकी में सार्थकता की जाँच के लिए अग्रांकित विधियों का विशेषतः उपयोग किया जाता है—

(i) काई-वर्ग परीक्षण ($\chi^2$ or Chi-square Test),

(ii) मध्यांक परीक्षण (Median Test),

(iii) चिन्ह परीक्षण (Sign Test),

(iv) चिन्ह क्रम अन्तर परीक्षण (The Sign Rank Test of Differences),

(v) संयुक्त क्रम विधि (Composite Rank Method)।

अब हम प्रत्येक विधि की विस्तृत व्याख्या अलग-अलग करेंगे।

## काई-वर्ग (काई-स्क्वेअर) परीक्षण (Chi-square Test) की उत्पत्ति

अप्राचल विधियों (Non-parametric Methods) में काई-वर्ग (Chi-square) परीक्षण एक प्रमुख विधि है। इस परीक्षण की रचना का अधिकतर श्रेय प्रोफेसर कार्ल पीयरसन को ही है, जिन्होंने सांख्यिकी-शास्त्र को आघूर्ण गुणनफल सह-सम्बन्ध गुणांक विधि (Product Moment Method of Co-efficient of Correlation) तथा अन्य महत्त्वपूर्ण सांख्यिकीय प्रविधियों (Techniques) के जन्मदाता होने का पहले ही पर्याप्त श्रेय है। कार्ल पीयरसन ने ग्रीक अक्षर काई-वर्ग ($\chi^2$) का सर्वप्रथम प्रयोग 1900 ई. में किया था। उस समय उनका ध्येय इसके आधार पर प्रेक्षित घटना (Observed Phenomenon) तथा सिद्धान्त-आधारित प्रत्याशित घटना (Expected Phenomenon) के अन्तर (Discrepancy) की व्याख्या करना था।

## काई-वर्ग ($\chi^2$) परीक्षण की सामान्य विशेषतायें (General Features of Chi-Square Test)

अप्राचल आँकड़ों में सार्थकता की जाँच के लिए काई-वर्ग परीक्षण का महत्त्वपूर्ण स्थान है। इसका उपयोग मुख्यतः केवल ऐसी प्रदत्त सामग्री (Data) के साथ किया जा सकता है जबकि प्रदत्त सामग्री (Data) को वर्गों अथवा आवृत्तियों (Frequencies) में व्यक्त किया जा सके। आवृत्तियों (Frequencies) के स्थान पर अनुपातों (Proportions) तथा प्रसम्भाव्यताओं (Probabilities) को भी प्रयोग में लाया जा सकता है।

इसके अतिरिक्त, काई-वर्ग की एक विशेषता यह है कि इस परीक्षण द्वारा एक ही समय में एक ही परिकल्पना (Hypothesis) के अन्तर्गत एक से अधिक चरों (Variables) की सार्थकता की जाँच की जा सकती है, क्योंकि विभिन्न चरों के काई-वर्ग ($\chi^2$) के मानों को एक साथ योग करके सार्थकता की जाँच की जा सकती है। इस सुविधा का आधार काई-वर्ग ($\chi^2$) के मानों की योगशीलता की विशेषता (Additive Property) है।

परिभाषा के अनुसार भी, काई-वर्ग ($\chi^2$) ऐसे अनुपातों का योग (Sum of Ratios) होता है, जोकि एक परीक्षण में प्रेक्षित आवृत्तियों (Observed Frequencies) तथा किसी एक सिद्धान्त अथवा परिकल्पना के आधार पर प्रत्याशित आवृत्तियों (Expected Frequencies) के बीच पाये जाने वाले अन्तर (Discrepancy) पर आधारित होता है।

## काई-वर्ग ($\chi^2$) की उपयोगिता

अनुसन्धान कार्य में परिकल्पनाओं के परीक्षणों में काई-वर्ग ($\chi^2$) के महत्त्वपूर्ण उपयोग हैं। इसके कुछ उपयोग निम्नलिखित हैं—

**(1) प्रथम,** इसका उपयोग प्रेक्षित आवृत्तियों (Observed Frequencies) तथा प्रत्याशित घटनाओं (Expected Frequencies) के अन्तर की सार्थकता (Significance) की व्याख्या करना होता है। एक परीक्षण में काई-वर्ग ($\chi^2$) द्वारा यह ज्ञात हो जाता है, कि इस प्रकार की आवृत्तियों में

अन्तर संयोगवश (Due to Chance) है, अथवा किसी विशेष सम्बन्ध के कारण से ऐसा अन्तर पाया जाता है।

(2) **दूसरे,** काई-वर्ग ($\chi^2$) परीक्षण द्वारा एक समय पर एक से अधिक चरों का, अन्य चरों पर प्रभाव का अध्ययन, एक ही परिकल्पना (Hypothesis) के अन्तर्गत एक साथ किया जा सकता है, इसका कारण काई-वर्ग ($\chi^2$) के विभिन्न चरों के प्रभावों के कारण विभिन्न काई-वर्ग के मानों के योगशीलता की विशेषता (Additive Property) है।

(3) **तीसरे,** इस परीक्षण द्वारा प्रेक्षित आवृत्तियों का विचलन उपयुक्त प्रत्याशित आवृत्तियों (Appropriate Expected Frequencies) से सम्भव होता है। ऐसे विचलन का आधार समान वितरण की परिकल्पना, प्रसामान्य वितरण की परिकल्पना या अन्य कोई भी वांछित परिकल्पना हो सकती है। इस प्रकार इस परीक्षण द्वारा उपयुक्त प्रत्याशित आवृत्तियों का उपयोग (Goodness of Fit) सम्भव रहता है।

(4) **चौथे,** इस परीक्षण का प्रयोग ऐसी स्थितियों में विशेषतः उपयोगी रहता है, जहाँ कि परीक्षण के प्रतिदर्श (Sample) की संख्या छोटी (Small) रहती है।

(5) **पाँचवें,** इसका उपयोग चिकित्सा क्षेत्र (Medical Field) में विशेषतः उल्लेखनीय है, क्योंकि प्रायः वहाँ एक ही समय पर एक से अधिक चिकित्सा पद्धतियों के प्रभाव का अध्ययन किया जाता है। मनोविज्ञान के क्षेत्र में भी प्रायः मुख्य अनुसंधान (Main Research) से पूर्व इसका प्रयोग अग्रगामी अध्ययन (Pilot Study) में विशेषतः उपयोगी रहता है।

## काई-वर्ग परीक्षण ($\chi^2$ Test) का आधार

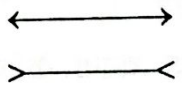
काई-वर्ग परीक्षण के अन्तर्गत एक घटना के सम्बन्ध में प्रेक्षित आवृत्तियों (Observed Frequencies) तथा प्रत्याशित आवृत्तियों (Expected Frequencies) के अन्तर (Discrepancy) की यह व्याख्या करना होता है कि ऐसा अन्तर संयोगवश (Due to Chance) है अथवा ऐसा अन्तर किसी सम्बन्ध के कारण उत्पन्न हुआ है। उदाहरणतः जब हम किसी एक निरपेक्ष (Unbiased) सिक्के को ऊपर उछालते हैं, तब उसके चित्त (Head) की ओर से पड़ने तथा पट्ट (Tail) की ओर से पड़ने की प्रसम्भाव्यता (Probability) 50 : 50 प्रतिशत रहती है। अब यदि हम ऐसे सिक्के को 100 बार ऊपर उछालते हैं, तब उसके चित्त (Head) की तरफ से पड़ने की प्रसम्भाव्यता सैद्धान्तिक रूप से (Theoretically) 100 में से 50 ही रहती है। अब यदि हमारा सिक्का 50 बार चित्त (Head) की तरफ से न गिरकर 55 बार या 58 बार चित्त की तरफ से पड़ता है, तब हम कि यहाँ ऐसे विचलन अर्थात् सिक्के के 50 बार चित्त न गिरने के स्थान पर 58 बार चित्त गिरने को केवल एक संयोग (Chance) ही कह सकते हैं। अब यदि सिक्का 100 बार उछालने पर 80 बार चित्त (Head) की तरफ से गिरता है, तब ऐसी स्थिति में हम स्वाभाविकतः ऐसे अप्रत्याशित विचलन (Unexpected Deviation) से थोड़ा परेशान (Puzzled) हो उठते हैं, और यदि कहीं हमारा सिक्का 100 बार उछालने पर 100 ही बार चित्त (Head) की ओर से पड़ता है, तब हमें सिक्के के निरपेक्ष (Unbiased) होने में एकदम सन्देह होने लगता है। इस सन्देह का क्या कारण है ? इसका कारण स्पष्ट है। जब किसी एक घटना के घटित होने की प्रसम्भाव्यता (Probability) किसी एक सैद्धान्तिक प्रत्याशा (Theoretical Expectation) से अधिक विचलित (Deviated) हो जाती है, तब ऐसे विचलन की व्याख्या केवल संयोग (Chance) के आधार पर करना तर्कसंगत (Logical) नहीं होता। तर्क के अनुसार सिक्के के गिरने की प्रसम्भाव्यता दोनों ओर (Side) से 50 : 50 है।

अब यदि इन आवृत्तियों (Frequencies) में काफी विचलन हैं, तब प्रश्न यह उठता है कि ये विचलन (Deviations) कहाँ तक अर्थात् किस सीमा तक संयोग के कारण हैं ? और किस सीमा के बाहर ऐसे विचलनों को किसी सम्बन्ध (Relationship) की संज्ञा दी जा सकती है ?

यहाँ पर हमारे आँकड़े (Data) न तो क्रमबद्ध (Ordered) हैं और न मात्रात्मक (Quantitative) ही। इसके अतिरिक्त, यहाँ पर आँकड़ों का कोई शून्य बिन्दु (Zero Point) भी नहीं है, और इस कारण जोड़ने, घटाने, गुणा करने व विभाजित करने की क्रियाएँ भी यहाँ नहीं हो सकती हैं। यहाँ वास्तव में, हमारे आँकड़ों का कोई आकार नहीं है, परन्तु यहाँ हमें संयोग (Chance) का एक मात्र आधार उपलब्ध है, और यहाँ अपने आँकड़ों में यह ज्ञात करना होता है, कि गणित के आधार पर कहाँ तक विचलन की संयोग के आधार पर व्याख्या की जा सकती है ? तथा किस सीमा के पश्चात् सम्बन्ध (Relationship) के कारण की सीमा आरम्भ होती है ? **कार्ल पीयरसन** के आसंग गुणांक (Coefficient of Contingency) के सूत्र का यही आधार है।

इस तथ्य की व्याख्या के लिए मान लिया हम 100 व्यक्तियों को एक अध्ययन में मुलर-लायर भ्रम-परीक्षण (Muller-Lyre Illusion Test) देते हैं, और यह ज्ञात करते हैं, कि 100 व्यक्तियों में से कितने व्यक्ति किस रेखा तीर-रचना वाली रेखा (Arrow-headed line) अथवा पंख वाली रेखा (Feather-headed line) को तुलनात्मक रूप से बड़ी (Longer) बताते हैं ? यहाँ 100 व्यक्तियों के अनुमान (Guess) दो संवर्गों (Categories) में विभाजित (Divided), हैं; 68 व्यक्ति पंख-रचना वाली रेखा को अपेक्षाकृत अधिक लम्बा बताते हैं, तथा 32 व्यक्ति तीर-रचना वाली रेखा को अधिक लम्बा बताते हैं। अब प्रश्न यह है कि क्या दोनों संवर्गों के व्यक्तियों के अनुमानों (Guesses) में सार्थक अन्तर (Significant Difference) है ?

**मूलर-लायर परीक्षण (Muller-Lyer Test)**




## तालिका 1

**100 व्यक्तियों के उपरोक्त रेखाओं के तुलनात्मक रूप से अधिक लम्बा होने के सम्बन्ध में अनुमान**

| उन व्यक्तियों की आवृत्तियाँ जिनके अनुसार तीर रचना वाली रेखा (a) लम्बी है | उन व्यक्तियों की आवृत्तियाँ जिनके अनुसार पंख-रचना वाली रेखा (b) लम्बी है | योग |
|---|---|---|
| 32 | 68 | 100 |

यहाँ उपरोक्त समस्या को हल करने के लिए हम संयोग (Chance) के सिद्धान्त की कल्पना (Assumption) की सहायता लेते हैं, और यह मानकर चलते हैं कि दोनों संवर्गों के व्यक्तियों के अनुमानों में अन्तर (Difference) शून्य (Zero) के बराबर है। दूसरे शब्दों में, हम यहाँ निराकरणीय परिकल्पना (Null Hypothesis) की रचना करते हैं, और उसकी कसौटी पर प्रेक्षित अनुमानों (Observed Guesses) से विचलन (Deviations) तथा सिद्धान्त पर आधारित (Theoretically Expected) अनुमानों अथवा आवृत्तियों (Frequencies) से विचलन की जाँच करते हैं।

मानक विचलन (S. D.) वाले अध्याय में यह हम पहले ही अध्ययन कर चुके हैं कि जब हम किसी एक वितरण (Distribution) में मानक विचलन (Standard Deviation) ज्ञात करते हैं तब हम वितरण के मध्यमान (Mean) से प्राप्त विचलनों को वर्गित (Squared) करते हैं, और उसके पश्चात् वितरण की प्रत्येक इकाई से समस्त वर्गित मानों (Squared Values) का योग ($\Sigma$) ज्ञात करते हैं, और फिर, विचलन-मान को ज्ञात करने के लिए वर्गित मानों के योग को वितरण संख्या (N) से

विभाजित करके उसका वर्गमूल (Square Root) ज्ञात कर लेते हैं। इस प्रकार प्राप्त राशि ही वितरण का मानक विचलन (S. D.) होता है। जिस प्रकार मानक विचलन के आधार पर किसी एक प्राप्तांक (Score) के मध्यमान से विचलन को जैड-स्कोर (Z-Score) के आधार पर ज्ञात किया जाता है, ठीक उसी प्रकार, काई-वर्ग ($\chi^2$) परीक्षण में भी Z-स्कोर के आधार पर ही विचलन की मात्रा का आकलन (Estimate) लगाया जाता है। प्रसम्भाव्यता सिद्धान्त के आधार पर हम पहले ही यह देख चुके हैं, कि जब तक Z-स्कोर का मान 1·96 से कम रहता है, तब तक यह धारणा रहती है कि इतना विचलन प्रतिदर्श की त्रुटियों (Sampling Errors) के कारण हो सकता है। परन्तु जब एक प्राप्तांक के Z-स्कोर का मान 1·96 हो जाता है, तब इस प्रकार के प्राप्तांक के घटित होने की प्रसम्भाव्यता केवल ·05 (P = ·05) ही रह जाती है, और यह धारणा बन जाती है कि ऐसा विचलन प्रतिदर्श की त्रुटि के कारण नहीं है, बल्कि विभिन्न समष्टि (Different Universe) के कारण है, तथा जैसे-जैसे Z-प्राप्तांक का मान बढ़ता चला जाता है, यह धारणा और भी अधिक दृढ़ होती चली जाती है। यदि यह मान बढ़कर 2·33 हो जाता है, तब हम 2% विश्वास के स्तर पर निराकरणीय परिकल्पना (Null Hypothesis) को अस्वीकृत कर देते हैं, और जब यह मान 2·58 हो जाता है, तब निराकरणीय परिकल्पना को विश्वास के 1% स्तर पर अस्वीकृत कर देते हैं।

काई-वर्ग विधि (Chi-square Method) में भी सैद्धान्तिक आधार प्रत्याशित आवृत्तियों (Expected Frequencies) से प्रेक्षित आवृत्तियों (Observed Frequencies) के विचलन (Deviations) ज्ञात किये जाते हैं, फिर उनको मानक विचलन विधि के समरूप आधार पर वर्गित (Squared) किया जाता है और फिर वर्गित विचलनों के मानों को उनसे सम्बन्धित प्रत्याशित आवृत्तियों (Expected Frequencies) से विभाजित किया जाता है, इस प्रकार प्राप्त राशि ही यहाँ Z-स्कोर का काम करती है। फिर प्रत्येक संवर्ग (Category) के इस प्रकार से प्राप्त मानों (Values) का योग ज्ञात कर लिया जाता है, और यही मान काई-वर्ग ($\chi^2$) कहा जाता है। काई-वर्ग का सूत्र—

$$\chi^2 = \Sigma \left\{ \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \right\} \quad \text{.... सूत्र (1)}$$

जबकि : $f_o$ = frequencies observed अथवा प्रेक्षित आवृत्तियाँ

$f_e$ = frequencies expected अथवा प्रत्याशित आवृत्तियाँ

### $\chi^2$ की गणना के लिए विभिन्न चरण (Steps)

(1) प्रेक्षित (Observed) आवृत्तियों को उनके उपयुक्त कोष्ठकों (Cells) में लिखना।

(2) प्रत्याशित (Expected) आवृत्तियों को उनके उपयुक्त कोष्ठकों (Cells) में लिखना।

(3) प्रेक्षित आवृत्तियों ($f_o$) में से प्रत्याशित आवृत्तियों ($f_e$) को घटाकर अलग-अलग अन्तर ज्ञात करना।

(4) प्रत्येक $f_o - f_e$ के मान को वर्गित (Squared) करना अथवा $(f_o - f_e)^2$ ज्ञात करना।

(5) प्रत्येक वर्गित $(f_o - f_e)^2$ के मान को उससे सम्बन्धित प्रत्याशित आवृत्तियों (Expected Frequencies) के मान से विभाजित करना।

(6) इस प्रकार प्राप्त प्रत्येक संवर्ग के मान का योग (Total) ज्ञात करना।

(7) स्वतन्त्रता के अंशों को ज्ञात करना।

(8) प्राप्त $\chi^2$ के मान की सार्थकता की जाँच दिये गये स्वतन्त्रता के अंशों (Degrees of Freedom) पर सम्बन्धित सारणी में सार्थकता के विभिन्न स्तरों (5% तथा 1% स्तर) पर अध्ययन करना।

## $\chi^2$ तथा प्रत्याशित आवृत्तियों (Expected Frequencies) की गणना

काई-वर्ग में प्रत्याशित आवृत्तियों की गणना के लिए प्रायः तीन निम्नलिखित परिकल्पनाओं (Hypothesis) का सहारा लिया जाता है—

(1) समान-वितरण की परिकल्पना (Hypothesis of Equal Distribution)।

(2) प्रसामान्य-वितरण की परिकल्पना (Hypothesis of Normal Distribution)।

(3) स्वतन्त्र-वितरण की परिकल्पना (Hypothesis of Independent Distribution)।

**(1) समान-वितरण की परिकल्पना** (Hypothesis of Equal Distribution)—प्रस्तुत उदाहरण में हमारी परिकल्पना सम-वितरण पर आधारित है। यह हम पहले ही देख चुके हैं कि प्रस्तुत उदाहरण में प्रेक्षित आवृत्तियाँ (Observed Frequencies) 32 व 68 हैं, तथा संयोग के आधार पर सैद्धान्तिक दृष्टिकोण से प्रत्याशित (Expected) आवृत्तियाँ दोनों संवर्गों (Categories) में 50 व 50 होंगी, क्योंकि यदि 100 व्यक्ति किसी कारण से प्रभावित न होकर अपना-अपना अनुमान देते हैं, तब संयोग यही होगा कि 50 व्यक्ति तीर-रचना वाली रेखा को तुलनात्मक दृष्टि से अधिक लम्बा बतायेंगे, तथा शेष 50 व्यक्ति पंख-रचना वाली रेखा को लम्बा बतायेंगे। इस प्रकार प्रेक्षित आवृत्तियों में से प्रत्याशित आवृत्तियों के घटाने पर हमें विचलन ज्ञात हो जायेंगे। जिस प्रकार मानक विचलन की गणना में विचलनों के धनात्मक चिन्हों तथा नकारात्मक चिन्हों की ओर ध्यान न देकर उनको वर्गित (Squared) कर लिया जाता है, ठीक ऐसा ही दृष्टिकोण काई-वर्ग विधि में भी अपनाया जाता है। वास्तविक गणना के अध्ययन के लिए निम्नलिखित सारणी का अध्ययन कीजिए—

### तालिका 2

| | तीर-रचना वाली रेखा को लम्बी बताने वाले व्यक्तियों की संख्या | पंख-रचना वाली रेखा को लम्बी बताने वाले व्यक्तियों की संख्या | योग |
|---|---|---|---|
| प्रेक्षित आवृत्तियाँ (Observed Frequencies) or $F_o$ | 32 | 68 | 100 |
| प्रत्याशित आवृत्तियाँ (Expected Frequencies) or $F_e$ | 50 | 50 | 100 |

विचलन or $d = (F_o - F_e) = -18$ $\quad +18$

विचलनों का वर्ग $(d^2) = 324 \quad 324$

$d^2/N = 324/50 = 6{\cdot}48 \quad 324/50 = 6{\cdot}48$

यहाँ $\chi^2 = 6{\cdot}48 + 6{\cdot}48 = 12{\cdot}96$

अब यहाँ $\chi^2$ के मान 12·96 से हम क्या अनुमान लगा सकते हैं ? यहाँ $\chi^2$ का मान हमें ठीक वैसी ही सूचना देता है, जैसे निराकरणीय परिकल्पना (Null Hypothesis) के सम्बन्ध में टी का मान (t-Value) देता है। यह हमें पहले ही ज्ञात है, कि t का मान एक प्रकार से Z के मान में एक अनुपात (Ratio) है, ठीक उसी प्रकार यहाँ पर विचलनों के वर्ग ($d^2$) अपनी प्रत्याशित आवृत्तियों $F_e$ से विभाजित किये जाने पर Z-स्कोर के समान एक अनुपात (Ratio) ही है, तथा इस प्रकार प्राप्त अनुपातों के योग से प्राप्त $\chi^2$ का मान एक प्रकार से t का ही मान हो जाता है, और जिस प्रकार हम t के मान की सार्थकता की जाँच सारणी में 5% स्तर, 2% स्तर व 1% स्तर पर करते हैं, तथा साथ ही स्वतन्त्रता के अंशों (Degrees of Freedom) को भी ध्यान में रखते हैं, ठीक वही क्रम हमें $\chi^2$ के

मान की सार्थकता की जाँच के लिए अपनाना पड़ता है। अन्तर केवल यही है, कि t के मान की जाँच के लिए अलग सारणी है, तथा $\chi^2$ के लिए अलग सारणी है। इसके अतिरिक्त, दूसरा अन्तर स्वतन्त्रता के अंशों (Degrees of Freedom) को ज्ञात करने का है। t के मान के लिए स्वतन्त्रता के अंशों का सूत्र होता है (N – K) : जबकि N = समूहों की इकाइयों की संख्या तथा K = समूहों की संख्या। परन्तु काई-वर्ग ($\chi^2$) विधि में हमें इसके लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करना पड़ता है–

Degrees of Freedom or d. f. = (r – 1) (c – 1) .... सूत्र (2)

r = Number of Rows

c = Number of Columns

प्रस्तुत उदाहरण में आवृत्तियों की दो पंक्तियाँ (Rows) हैं, तथा दो ही स्तम्भ (Columns) हैं। अतएव

यहाँ d. f. = (2 – 1) (2 – 1)

= (1) × (1)

= 1 हुआ।

परिशेषिका में दी गयी $\chi^2$ की सारणी में 1 Degree Freedom पर 5% विश्वास के स्तर तथा 1% विश्वास के स्तर पर $\chi^2$ के निम्नलिखित मानों का होना सार्थकता के लिए आवश्यक है।

5% स्तर पर = 3·84

1% स्तर पर = 6·64

प्रस्तुत उदाहरण में प्राप्त $\chi^2$ का मान ऊपर दिये गये 1% विश्वास के स्तर के 6·64 के मान से बहुत अधिक है, अतएव यहाँ निराकरणीय परिकल्पना (Null Hypothesis) को अस्वीकृत किया जाता है और यहाँ यह मान लेना पड़ेगा कि दोनों रेखाओं के तुलनात्मक लम्बाई के आकलन में प्राप्त आवृत्तियाँ संयोगवश (Due to chance) नहीं हैं, बल्कि वास्तविक अन्तर के कारण है।

**उदाहरण 1. एक कक्षा के 72 विद्यार्थियों को तीन रंगों–नारंगी, बैंगनी व गुलाबी रंगों के लिए अपनी पसन्द व्यक्त करने को कहा गया। उनकी पसन्दगी (Liking) के आधार पर निम्नलिखित आवृत्तियाँ प्राप्त हुईं। बताइये क्या उनकी पसन्दों में वास्तविक अन्तर है ?**

**तालिका 3**

| पसन्द किये जाने वाले रंग | नारंगी | बैंगनी | गुलाबी |
|---|---|---|---|
| अलग-अलग रंग को पसन्द करने वाले विद्यार्थियों की संख्या | 42 | 12 | 18 |

हल–

**तालिका 4**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Frequencies Observed ($f_o$) प्रेक्षित आवृत्तियाँ | 42 | 12 | 18 | 72 |
| Frequencies Expected ($f_e$) प्रत्याशित आवृत्तियाँ | 24 | 24 | 24 | 72 |
| $(f_o - f_e)$ | 18 | – 12 | – 6 | |
| $(f_o - f_e)^2$ | 324 | 144 | 36 | |
| $\frac{(f_o - f_e)^2}{f_o}$ or $\chi^2$ | 13·5 | 6 | 1·5 | |

$$\Sigma\chi^2 = (13{\cdot}5 + 6 + 1{\cdot}5) = 21$$

स्वतन्त्रता के अंश (Degrees of Freedom) or d. f. = (Columns – 1) (Rows – 1)

**टिप्पणी**—जबकि पंक्तियों (Rows) की संख्या तथा स्तम्भों (Columns) की संख्या 1 से अधिक हो, तभी उपरोक्त सूत्र का उपयोग किया जा सकता है। परन्तु उस स्थिति में जबकि पंक्तियों (Rows) की संख्या केवल एक ही होती है, तब यह सूत्र लागू नहीं होता। ऐसी स्थिति में d. f. ज्ञात करने के लिए (r – 1) के स्थान पर केवल 1 की ही संख्या मानी जायेगी। प्रस्तुत उदाहरण में स्तम्भों की संख्या मानी जायेगी। प्रस्तुत उदाहरण में स्तम्भों की संख्या केवल 1 है। अतएव यहाँ d. f. मान $(3 - 1) \times 1 = 2$ होगा।

$\chi^2$ की सारणी को 2 d. f. पर देखने से ज्ञात होता है कि 5% विश्वास के स्तर पर यह मान = 5·99 तथा 1% विश्वास के स्तर पर यह मान = 9·21 होना चाहिए।

परन्तु प्रस्तुत उदाहरण में हमारा $\chi^2$ का मान इन दोनों स्तरों पर दिये गये आवश्यक मानों से कहीं बहुत अधिक है, अतएव यहाँ यह विश्वास हो जाता है कि विद्यार्थियों की पसन्दों (Likings) में सार्थक अन्तर (Significant Difference) देखने में आता है, और इस कारण यहाँ पर निराकरणीय परिकल्पना (Null Hypothesis) को 1% विश्वास के स्तर पर अस्वीकृत (Reject) कर दिया जाता है।

**उदाहरण 2. एक परीक्षण में 100 विद्यार्थियों को एक दृश्य (Scenery) का सुन्दरता के आधार पर आंकन (Assessment) करने को कहा गया। परीक्षण के आधार पर विद्यार्थियों के आंकन की आवृत्तियाँ नीचे दी गई हैं। अब यदि यह मान लिया जाता है कि समस्त विद्यार्थियों की पसन्द समान है, तब उस स्थिति में क्या प्रेक्षित आवृत्तियाँ (Observed Frequencies) में यहाँ सार्थक अन्तर देखने में आता है ?**

**तालिका 5**

| आंकन श्रेणियाँ | E बहुत भद्दी | D भद्दी | C न सुन्दर न भद्दी | B सुन्दर | A बहुत सुन्दर |
|---|---|---|---|---|---|
| आवृत्तियाँ (f) | 10 | 30 | 35 | 15 | 10 |

योग = 100

**हल—**

**तालिका 6**

| श्रेणियाँ | E | D | C | B | A | योग |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_o$ | 10 | 30 | 35 | 15 | 10 | 100 |
| $f_e$ | 20 | 20 | 20 | 20 | 20 | 100 |
| $f_o - f_e$ | – 10 | 10 | 15 | – 5 | – 10 | |
| $(f_o - f_e)^2$ | 100 | 100 | 225 | 25 | 100 | |
| $\frac{(f_o - f_o)^2}{f_e}$ | 5 | 5 | 11·25 | 1·25 | 5 | |

$$\Sigma \text{ of } \chi^2 = 5 + 5 + 11{\cdot}25 + 1{\cdot}25 + 5$$
$$= 27{\cdot}5$$

$$d.f. = (r-1)(C-1) = (2-1)(5-1)$$
$$= 1 \times 4 = 4$$

4 d. f. पर तथा विश्वास के स्तरों पर सार्थकता के लिए $\chi^2$ का मान–

5% स्तर पर = 9·488

1% स्तर पर = 13·277

प्रस्तुत उदाहरण में प्राप्त काई-स्कवेयर ($\chi^2$) का मान ऊपर दी गई दोनों राशियों से अधिक है, अतएव यहाँ यह मान लेना पड़ेगा कि परीक्षण में दिए गये दृश्य के विषय में 100 विद्यार्थियों के आंकनों (Assessments) में वास्तविक तथा सार्थक अन्तर हैं, और इस कारण यहाँ पर इस सम्बन्ध में निराकरणीय परिकल्पना (Null Hypothesis) को अस्वीकृत किया जाता है।

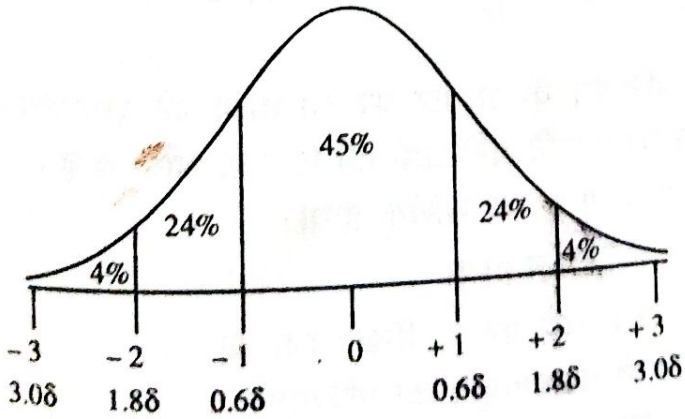
**2. काई-वर्ग ($\chi^2$) के मान की प्रसामान्य वितरण** (Normal Distribution) **की परिकल्पना** (Hypothesis) **के आधार पर गणना**—काई-वर्ग ($\chi^2$) का मान ज्ञात करने के लिए अभी तक हमारी परिकल्पना (Hypothesis) समान वितरण (Equal Distribution) की रही है। परन्तु एक स्थिति ऐसी भी हो सकती है, जबकि हमारी कल्पना समान वितरण पर आधारित न रह कर प्रसामान्य वितरण (Normal Distribution) पर आधारित हो। ऐसी स्थिति में प्रत्याशित आवृत्तियों (Expected Frequencies) को ज्ञात करने का आधार प्रसामान्य वितरण के सिद्धान्त (Principle of Normal Distribution) होंगे। इस तथ्य को स्पष्ट करने के लिए हम उदाहरण नं. 2 की प्रेक्षित आवृत्तियों (Observed Frequencies) को ही लेते हैं। अधिक स्पष्टता के लिए उदाहरण नं. 2 के आँकड़ों को ही उदाहरण नं. 3 में लिया गया है।

**उदाहरण 3. निम्नलिखित तालिका से $\chi^2$ की गणना कीजिए।**

| | सर्वोत्तम | उत्तम | सन्तोषप्रद | असन्तोषप्रद | बराबर | योग |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_o$ | 8 | 16 | 39 | 22 | 15 | 100 |

**हल**—सर्वप्रथम निरीक्षण की हुई आवृत्तियों के आधार पर जितने कॉलम हों उसमें 6 (+ 3 and - 3 जोड़कर) से भाग दें। जितना भागफल आता है उसे + 3Q तथा – 3Q से घटाकर सामान्य विवरण वक्र की सारणी देखते हैं तत्पश्चात् सारणी से ज्ञात मूल्य को ऊपर से नीचे घटाते हैं फिर N से गुणा करके उसे प्रत्येक स्तम्भ पर अंकित करते हैं। शेष नियम उपर्युक्त ही है।

$$\frac{6}{5} = 1.2$$




| | |
|---|---|
| + 3.0 | –3.0 |
| 1.2 | 1.2 |
| 1.8 | 1.8 |
| –1.2 | –1.2 |
| .6 | .6 |

**आकृति संख्या 1** : इसमें एक वितरण को प्रसामान्य वितरण के आधार पर पाँच समान भागों में विभाजित किया गया है। यहाँ ध्यान देना अति आवश्यक है कि $f_o$ तथा $f_e$ का योग एक समान होना चाहिए।

$+ 3Q = .4987$ (NPC table के अनुसार)

$+ 1.8Q = .4641$

$+ 0.6Q = .2257$

$\Rightarrow .4987 - .4641 = .0346 \times 100 = 3.46\ (4)$

$\Rightarrow .4641 - .2257 = .2414 \times 100 = 24.14\ (24)$

$\Rightarrow .2257 + .2257 = .4454 \times 100 = 44.54\ (45)$

$\Rightarrow .2257 - .4641 = -.2414 \times 100 = -24.14\ (24)$

$\Rightarrow .4641 - .4987 = -.0346 \times 100 = -3.41\ (4)$

**Note**—कॉलम की संख्या सम होने पर लगातार घटाते जायेंगे जब तक कि सभी कॉलम का f.e न मिल जाये। जबकि विषम होने पर बीच में जोड़ते हैं।

## तालिका 7

| | सर्वोत्तम | उत्तम | सत्तोषप्रद | असत्तोषप्रद | बराबर | योग |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_o$ | 8 | 16 | 39 | 22 | 15 | 100 |
| $f_e$ | 4 | 24 | 45 | 24 | 4 | |
| $f_o - f_e$ | 4 | 8 | 6 | 02 | 11 | |
| $(f_o - f_e)^2$ | 16 | 64 | 36 | 04 | 121 | |
| $\frac{(f_o - f_o)^2}{f_e}$ | 4 | 2.64 | 0.36 | 0.17 | 30.25 | |

$$\chi^2 = 4 + 2.67 + 0.36 + 0.17 + 30.25 = 37.45$$

$$df = (c - 1)(r - 1)$$

$$= (5 - 1)(2 - 1)$$

$$= 4 \times 1$$

$$= 4$$

$4df$ $\quad .05 = 9.49$

$\quad .01 = 11.07$

प्राप्त $\chi^2$ मूल्य 37.45 सारणी (NPC) के 4df पर अंकित मूल्य .05 तथा .01 स्तरों (9.49 तथा 11.07) से तुलनात्मक दृष्टि से अधिक है। अतः दोनों ही स्तर पर अन्तर सार्थक है और नल परिकल्पना अस्वीकार कर दी जाती है।

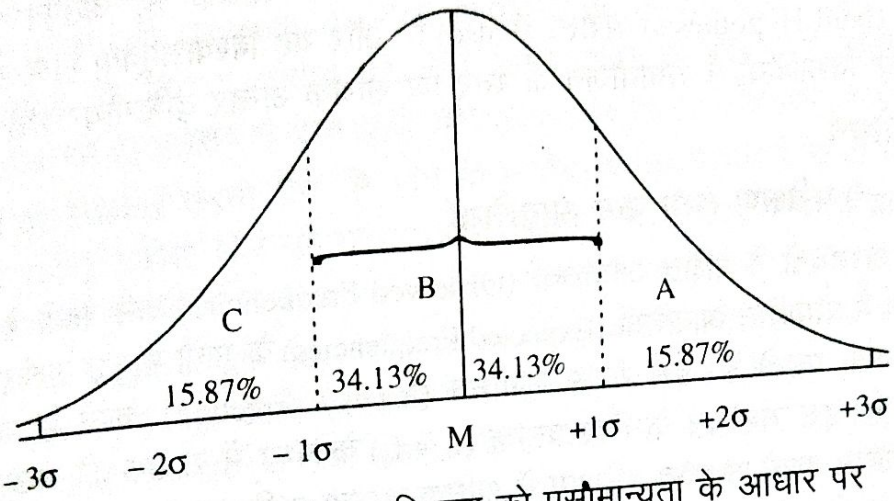
**उदाहरण 4. एक परीक्षण के परिणाम के आधार पर 50 छात्रों को समायोजन स्तर पर निश्चित क्रम में तीन श्रेणियों में रखा गया। यदि परिणामों का वितरण सामान्य है तो प्रथम श्रेणी में कितने छात्र आयेंगे और क्या इस वितरण अन्तर सार्थक होगा?**

## तालिका 8

समायोजन के आधार पर 50 विद्यार्थियों का
तीन श्रेणियों में विभाजन का परिणाम

| समायोजन स्तर | (C) असन्तोषजनक | (B) सन्तोषजनक | (A) अधिक सन्तोषजनक | योग |
|---|---|---|---|---|
| प्रेक्षित संख्या | 16 | 24 | 10 | 50 |

हल–प्रसामान्य वितरण के सिद्धान्त के अनुसार एक वितरण अपने मध्यमान से $\pm 3\sigma$ के अन्तर्गत विस्तृत रहता है अथवा उसका प्रसार $6\sigma$ के अन्तर्गत रहता है। प्रस्तुत उदाहरण में सम्पूर्ण विद्यार्थी संख्या तीन श्रेणियों में वितरित है। अतएव प्रत्येक श्रेणी $6/2 = 3\sigma$ की दूरी तक फैली है। स्पष्ट अर्थ के लिए नीचे दिये गये प्रसामान्य वितरण में तीनों श्रेणियों की स्थिति का अध्ययन कीजिए।




**आकृति संख्या 2** : इसमें एक वितरण को प्रसामान्यता के आधार पर तीन श्रेणियों में विभाजित किया गया है–

A श्रेणी में विद्यार्थियों की संख्या : 50–34·13 = 15·87%

B श्रेणी के विद्यार्थियों की संख्या : 34·13 + 34·13 = 68·26%

C श्रेणी के विद्यार्थियों की संख्या : 50–34·13 = 15·87%

चूँकि प्रस्तुत उदाहरण में विद्यार्थियों की कुल संख्या 50 है अतएव प्रसामान्य वितरण (Normal Distribution) के आधार पर प्रत्येक श्रेणी में प्रत्याशित विद्यार्थियों की संख्या निम्नलिखित होगी–

श्रेणी A = 34·13 अथवा 34

श्रेणी B = 7·935 अथवा 8

श्रेणी C = 7·935 अथवा 8

$\chi^2$ का मान–

**तालिका 9**

| खण्ड समायोजन श्रेणियाँ | C असन्तोषजनक | B सन्तोषजनक | A अधिक सन्तोषजनक | योग |
|---|---|---|---|---|
| $f_o$ | 16 | 24 | 10 | 10 |
| $f_e$ | 8 | 34 | 8 | 50 |
| $f_o - f_e$ | 8 | – 10 | 2 | |
| $(f_o - f_e)^2$ | 64 | 100 | 4 | |
| $\frac{(f_o - f_o)^2}{f_e}$ | 8 | 2·94 | ·5 | |

$$\chi^2 = 8 + 2{\cdot}94 + {\cdot}5 = 11{\cdot}44$$

यहाँ $\qquad$ d. f. = 2

सार्थकता के लिए $\chi^2$ का आवश्यक मान—

5% स्तर पर = 5·99

1% स्तर पर = 9·21

प्राप्त काई-वर्ग का मान उपरोक्त दोनों मानों से अधिक है, अतएव यहाँ निराकरणीय उपकल्पना (Null Hypothesis) असत्य (False) है, और यह विश्वासपूर्वक (1% स्तर पर) कहा जा सकता है कि विद्यार्थियों में समायोजन के स्तर पर सार्थक अन्तर दृष्टिगोचर होते हैं।

## येट्स संशोधन

## काई-वर्ग ($\chi^2$) परीक्षण तथा कम आवृत्तियाँ

जिन अध्ययनों में प्रेक्षित आवृत्तियाँ (Observed Frequencies) कम रहती हैं, उनमें काई-वर्ग ($\chi^2$) परीक्षण में प्रत्याशित आवृत्तियों (Expected Frequencies) के मानों में कुछ संशोधन (Correction) की आवश्यकता पड़ती है। इसे येट्स संशोधन (Yates Correction) कहते हैं, तथा इसका मान (– ·5) होता है। इस संशोधन के लिए प्रत्येक ($f_o - f_e$) के मध्य में से 0·5 की संख्या घटा दी जाती है। ऐसा संशोधन करने से प्राप्त परिणाम में अधिक शुद्धता व विश्वसनीयता की सम्भावना बढ़ जाती है। स्पष्टता के लिए एक अध्ययन के निम्नलिखित उदाहरण को लीजिए।

**उदाहरण 5. एक क्रिकेट टीम का कप्तान 12 मैचों (Matches) में से 9 मैचों में टॉस (Toss) जीतता है तथा केवल 3 मैचों में ही टॉस हारता है। अध्ययनकर्त्ता की परिकल्पना यह है कि क्रिकेट कप्तान की श्रेष्ठ निर्णय शक्ति के ही कारण उसके टॉस के निर्णय अनुकूल (Favourable) रहते हैं। बताइये क्या अध्ययनकर्त्ता की परिकल्पना सत्य है ?**

**तालिका 10**

| | प्रतिकूल निर्णय | अनुकूल निर्णय | योग |
|---|---|---|---|
| प्रेक्षित आवृत्तियाँ } $f_o$ | 3 | 9 | 12 |
| प्रत्याशित आवृत्तियाँ } $f_e$ | 6 | 6 | 12 |
| $f_o - f_e$ | 3 | 3 | |
| Yates Correction (– ·5) | 2·5 | 2·5 | |

**टिप्पणी**—येट्स संशोधन के लिए $f_o - f_e$ के मानों के चिन्हों की ओर ध्यान नहीं दिया जाता।

| | | |
|---|---|---|
| $(f_o - f_e)^2$ | 6·25 | 6·25 |
| $\frac{(f_e - f_o)^2}{f_e}$ | 1·04 | 1·04 |

$\chi^2 = 2·08$

d. f. = 1

चूँकि प्रस्तुत समस्या में हमारा परीक्षण एक सूत्र (One Tailed Test) है अतएव 1 d. f. पर सार्थकता के लिए $\chi^2$ के निम्नलिखित मानों (Values) का होना आवश्यक है–

5% स्तर पर = 2·706

1% स्तर पर = 5·412

प्राप्त $\chi^2$ का मान 5% स्तर पर सार्थकता के लिए आवश्यक मान से कम है। अतएव अध्ययनकर्त्ता की परिकल्पना (Hypothesis) यहाँ अस्वीकृत कर दी जाती है, अर्थात् उसकी यह परिकल्पना असत्य है कि क्रिकेट कप्तान की श्रेष्ठ निर्णय-शक्ति के कारण ही अधिक अनुकूल (Favourable) टॉस रहे हैं, वास्तव में ऐसा संयोगवश (Due to Chance) ही हुआ है।

परन्तु यहाँ यह स्वीकार करना होगा कि यदि येट्स संशोधन का प्रयोग न किया जाता तब $\chi^2$ का मान 2·08 न रहकर 3 होता और यह मान (Value) विश्वास के 5% स्तर पर सार्थक होता, उस स्थिति में अध्ययनकर्त्ता की परिकल्पना (Hypothesis) सत्य ही सिद्ध होती।

इस प्रकार हम देखते हैं कि येट्स संशोधन न करने से एक निराकरणीय परिकल्पना के असत्य होने की सम्भावना बढ़ जाती है, तथा ऐसी स्थिति में प्राप्त परिणाम तथा निष्कर्ष की विश्वसनीयता घट जाती है। अतएव जब हमारी प्रेक्षित आवृत्तियों (Observed Frequencies) की संख्या 10 से कम रहती है, उस स्थिति में येट्स संशोधन का प्रयोग किया जाना चाहिए। परन्तु जब संख्या 5 या 5 से कम होती है, उस स्थिति में येट्स संशोधन करना नितान्त आवश्यक हो जाता है। इसके अतिरिक्त उस स्थिति में भी ऐसा करना महत्त्वपूर्ण हो जाता है, जबकि काई-वर्ग ($\chi^2$) का मान सार्थक मान के बिल्कुल निकट रहता है, या ठीक उसके बराबर हो जाता है। ऐसी स्थिति में संशोधन न करने से निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकृत करना पड़ता है, लेकिन ऐसा करने में कुछ सन्देह अवश्य बना रहता है। यदि येट्स संशोधन के पश्चात् भी यही स्थिति रहती है, तब निराकरणीय परिकल्पना के अस्वीकृत करने में बिल्कुल सन्देह नहीं रहता।

**उदाहरण 5.1 निम्नलिखित आकड़ों की सहायता से $\chi^2$ की गणना कीजिए।**

## तालिका 11

| | सही | गलत | |
|---|---|---|---|
| $f_o$ | 60 | 40 | 100 |
| $f_e$ | 50 | 50 | 100 |

**हल–**

| | | |
|---|---|---|
| $(f_o - f_e)$ | 10 | 10 |
| Correction (– .5) | 9.5 | 9.5 |
| $(f_o - f_e)^2$ | 90.25 | 90.25 |
| $\frac{(f_o - f_o)^2}{f_e}$ | 1.81 | 1.81 |

$\chi^2 = 1.81 + 1.81 = 3.62$

df = P = .06

$\frac{1}{2}$ P = .30

यद्यपि सारणी 11 में कोष्ठक (Cell) की प्रविष्टयाँ बड़ी हैं; इसमें सातत्यता (Continuity) के लिए संशोधन अधिक सहमतियुक्त परिणाम उत्पन्न करेगा। ध्यान रहे जब सारणी की प्रविष्टियाँ बड़ी हों, 50 या अधिक को बड़ी कह सकते हैं तब संशोधन की सातत्यता का प्रभाव कम होता है।

किन्तु संशोधन के उपयोग की अपेक्षा जबकि संख्या अधिक हो, संभाव्यता को न्यून-प्राक्कलन की ओर ले जा सकती है। अतः इसका इस्तेमाल करना सामान्यतः बुद्धिमत्ता का काम है।

**येट्स संशोधन का आधार** (Rationale of Yates Correction)—येट्स संशोधन का प्रयोग प्रायः काई-वर्ग के मानों में अखण्डता (Continuity) लाने के लिए किया जाता है। इस कारण इसे येट्स अखण्डता संशोधन (Yates Correction for Continuity) भी कहा जाता है। वास्तव में, जब प्रेक्षित आवृत्तियों ($f_o$) का मान अधिक रहता है (प्रायः जब दस से अधिक रहता है) तब $f_o - f_e$ के मान में से येट्स संशोधन के लिए ·5 की मात्रा के घटाने का $\chi^2$ के मान पर कोई विशेष प्रभाव नहीं पड़ता। परन्तु जब प्रेक्षित आवृत्तियों का मान 10 या 10 से कम रहता है तब $f_o - f_e$ के मान में से येट्स संशोधन के लिए ·5 के घटा देने का प्रभाव $\chi^2$ के मान पर स्पष्ट रूप से दिखाई देने लगता है। इसके अतिरिक्त, प्रायः प्रेक्षित आवृत्तियों को खण्डित संख्या (Discrete Numbers) में लिखा जाता है, और उनसे विचलन भी प्रायः खण्डित संख्या में दिये जाते हैं, परन्तु शुद्धता की दृष्टि से ऐसा करना ठीक नहीं होता। जब प्रेक्षित आवृत्तियों की संख्या अधिक रहती है, तब उनसे विचलनों को खण्डित संख्या में व्यक्त करने से $\chi^2$ के मान पर विशेष प्रभाव नहीं पड़ता। परन्तु जब विचलन छोटी संख्याओं में ज्ञात किये जाते हैं तब उन्हें सतत् संख्या (Continuous Numbers) में लिखना नितान्त आवश्यक होता है। उदाहरण के लिए 6 में से 4 घटाने पर 2 नहीं, बल्कि 1·5 की संख्या लिखी जानी चाहिए, क्योंकि 6 की न्यूनतर सीमा (Lower Limit) 5·5 है। ऐसा करने से संख्याओं में खण्डता (Discrete) के स्थान पर निरन्तरता (Continuity) बनी रहती है। काई-वर्ग की गणना में जब प्रेक्षित आवृत्तियों की संख्या 10 से कम रहती है, विशेषतः जब 5 से कम रहती है, तथा जब स्वतन्त्रता के अंश की मात्रा 1 रहती है, (प्रायः ऐसा 2 × 2 की तालिका में होता है) उस स्थिति में येट्स संशोधन का करना अत्यन्त महत्त्वपूर्ण होता है।

यहाँ यह भी ध्यान रखने योग्य तथ्य है कि 2 × 2 की सारणी के चार कोष्ठिकाओं (Cells) में से जब कभी भी किसी एक या 2 कोष्ठिकाओं में प्रत्याशित आवृत्तियों ($f_e$) की संख्या 10 से कम रहती है, उस स्थिति में 2 × 2 की सारणी की प्रत्येक कोष्ठिका (Cell) में येट्स संशोधन के किये जाने की आवश्यकता रहती है। इसका कारण यह है कि कम प्रत्याशित आवृत्तियाँ (Low Expected Frequencies) ही—न कि कम प्रेक्षित आवृत्तियाँ (Now Low Observed Frequencies) इस बात की कसौटी (Test) होती है, कि येट्स संशोधन का प्रयोग किया जाना चाहिए या नहीं।

**2 × 2 सारणी के लिए एक अन्य संक्षिप्त सूत्र—**

$$\chi^2 = \frac{2(f_o - f_e)^2}{f_e} \qquad \text{.... सूत्र (3)}$$

यहाँ हम सुविधा के लिए उदाहरण 5 के ही आँकड़ों का प्रयोग करते हैं, जहाँ कि $f_o - f_e = 3 - \cdot 5$ (येट्स संशोधन से)।

इस संख्या को सूत्र में रखने पर,

$$\chi^2 = \frac{2(2\cdot5)^2}{6} = \frac{2 \times 6\cdot25}{6}$$

$$= \frac{12 \cdot 50}{6} = 2 \cdot 08$$

**टिप्पणी**—इस संक्षिप्त सूत्र का प्रयोग करने के लिए यह आवश्यक है कि प्रत्याशित आवृत्तियों (Expected Frequencies) का मान दोनों कोष्ठिकाओं (Cells) में समान रहना चाहिए।

**2 × 2 की आसंग सारणी** (Contingency Table) **में $\chi^2$ की गणना**—2 × 2 की आसंग सारणी में काई-वर्ग का मान एक दूसरी विधि द्वारा भी निकाला जा सकता है। इस विधि का सूत्र है—

$$\chi^2 = \frac{N(AD - BC)^2}{(A+B)(C+D)(B+D)(A+C)} \quad \text{....सूत्र (4)}$$

**उदाहरण 6. एक कक्षा में लड़कों तथा लड़कियों को एक चित्र दिखाया गया और सौन्दर्यात्मक आधार पर उसका आंकन सुन्दर व असुन्दर दो श्रेणियों में करने को कहा गया। परीक्षण के आधार पर प्राप्त लड़कों तथा लड़कियों की प्रेक्षित आवृत्तियाँ नीचे दी गई हैं। बताइये क्या लड़कों तथा लड़कियों के आंकन में सार्थक अन्तर है ?**

## तालिका 13

| लिंग | सुन्दर | असुन्दर | योग |
|---|---|---|---|
| लड़के | 16 | 8 | 24 |
| लड़कियाँ | 11 | 19 | 30 |
| योग | 27 | 27 | 54 |

## तालिका 14

**2 × 2 आसंग सारणी (Contingency Table)**

| A | B | A + B |
|---|---|---|
| 16 | 8 | 24 |
| C | D | C + D |
| 11 | 19 | 30 |
| A + C | B + D | A + B + C + D |
| 27 | 27 | 24 |

सारणी के अनुसार, $A + B = 24$ $\quad$ $C + D = 30$

$B + D = 27$ $\quad$ $A + C = 27$

$AD = 16 \times 19 = 304$

$BC = 11 \times 8 = 88$

$N = 16 + 8 + 11 + 19 = 54$

सूत्र के अनुसार, $$\chi^2 = \frac{54(304 - 88)^2}{24 \times 30 \times 27 \times 27}$$

$$= \frac{54(216 \times 216)}{24 \times 30 \times 27 \times 27}$$

$$= \frac{24}{5} = 4{\cdot}8$$

$$\text{d. f.} = (r-1)\,c-1)$$

$$= (2-1)\,(2-1) = 1$$

1 d. f. पर सार्थकता के लिए आवश्यक $\chi^2$ का मान—

5% विश्वास के स्तर पर = 3·84

1% विश्वास के स्तर पर = 6·635

प्रस्तुत उदाहरण में प्राप्त काई-वर्ग का मान 5% विश्वास के स्तर पर सार्थक है। परन्तु 1% विश्वास के स्तर पर सार्थक नहीं है। अतएव यहाँ निराकरणीय परिकल्पना (Null Hypothesis) सत्य नहीं है, और यहाँ 5% विश्वास के स्तर पर यह कहना पड़ेगा कि लड़कों तथा लड़कियों के दिये गये चित्र के आंकनों में सार्थक अन्तर है।

**टिप्पणी**—(1) इस सूत्र की विशेषता यह है कि इसके प्रयोग से $\chi^2$ का मान ज्ञात करने के लिए प्रत्याशित आवृत्तियों की गणना की आवश्यकता नहीं पड़ती।

(2) यदि 2 × 2 आसंग सारणी में येट्स संशोधन की आवश्यकता पड़े, तब नीचे दिये गये दूसरे सूत्र का प्रयोग किया जाना चाहिए।

### 2 × 2 सारणी तथा येट्स संशोधन (Yates Correction)

जब 2 × 2 सारणी की चार कोष्ठिकाओं (Cell) में से किसी एक कोष्ठिका में आवृत्तियों की संख्या बहुत कम अथवा 5 या इससे भी कम रहती है, उस स्थिति में बिना प्रत्याशित आवृत्तियाँ ($f_e$) ज्ञात किये ही तथा येट्स संशोधन सहित निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाना चाहिए—

$$\chi_e^2 = \frac{N[|AD-BC|-N/2]^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)} \quad \text{....सूत्र (5)}$$

$$\chi_e^2 = \chi^2 \text{ Corrected for Continuity}$$

अब इस सूत्र के अनुसार यदि हम उदाहरण नं. 6 के आँकड़ों की सार्थकता की जाँच करते हैं, तब काई-वर्ग ($\chi^2$) का मान निम्नलिखित होगा—

$$\chi_e^2 = \frac{54(|304-88|-54/2)^2}{24 \times 30 \times 27 \times 27}$$

$$= \frac{54(304-88-27)^2}{24 \times 30 \times 27 \times 27}$$

$$= \frac{54 \times 189 \times 189}{24 \times 30 \times 27 \times 27}$$

$$= \frac{147}{40}$$

$$= 3{\cdot}675$$

1 d. f. पर सार्थकता के लिए $\chi^2$ का आवश्यक मान—

5% विश्वास के स्तर पर = 3·841

1% " " " = 6·635

यहाँ पर हम देखते हैं कि प्राप्त $\chi^2$ का मान (3·675) दिये गये सूत्र में येट्स संशोधन के कारण सार्थक नहीं रहा है, जबकि पहले वाले सूत्र द्वारा $\chi^2$ का 4·8 का मान 5% विश्वास के स्तर पर सार्थक था। पहले वाली स्थिति में, जबकि संशोधन नहीं किया गया था, प्राप्त $\chi^2$ के मान के आधार पर निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकृत करना पड़ा था, जबकि संशोधन के पश्चात्, हम देखते हैं, कि $\chi^2$ का मान सार्थक मान की सीमा तक नहीं पहुँचता है। इन दोनों स्थितियों में संशोधन द्वारा $\chi^2$ के मान ज्ञात करने की विधि ही अधिक अच्छी है, जिससे स्पष्ट होता है कि विश्वास के साथ निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकृत करने के लिए परीक्षण को फिर से करना पड़ेगा। यदि फिर भी प्राप्त $\chi^2$ का मान आवश्यक सार्थक मान से कम रहता है, फिर हमें निराकरणीय परिकल्पना को ही स्वीकार करना होगा, और यदि संशोधन के पश्चात् परीक्षण की पुनरावृत्ति करने पर मान सार्थक रहता है तब हमें अपने परीक्षण के परिणाम में अधिक विश्वास हो जाता है, और उस स्थिति में हमें निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकृत करने में कोई संकोच नहीं रहता।

## काई-वर्ग ($\chi^2$) तथा प्रेक्षित आवृत्तियों की प्रतिशत के आधार पर व्याख्या

प्रेक्षित आँकड़ों (Observed Values) को प्रतिशत में परिवर्तित करने पर $\chi^2$ परीक्षण का उपयोग करना, गलत होता है, क्योंकि प्रसम्भाव्यता सिद्धान्त के अनुसार जो अन्तर की सार्थकता दो घटनाओं में 3 तथा 7 के मध्य देखने में आती है, वह 30 तथा 70 के मध्य के अन्तर से बिल्कुल भिन्न (Different) रहती है। यदि हमें प्रेक्षित आवृत्तियों को प्रतिशत करना पड़ ही जाय, तब प्राप्त काई-वर्ग ($\chi^2$) के प्रतिशत के मान को भी मूल आँकड़ों के अनुपात में कम करना पड़ता है। स्पष्टता के लिए नीचे दिये गये उदाहरण को देखिये।

**उदाहरण 7. एक क्रिकेट कप्तान 10 मैचों में से 80% मैचों में टॉस (Toss) जीतता है तथा 20% मैचों में टॉस हारता है, बताइये क्या क्रिकेट कप्तान के अनुकूल निर्णय (Favourable Decisions) संयोगवश हैं ?**

### तालिका 15

| निर्णय | अनुकूल | प्रतिकूल | योग |
|---|---|---|---|
| $f_o$ | 80% | 20% | 100 |
| $f_e$ | 50% | 50% | 100 |
| $f_o - f_e$ | 30% | 30% | |
| येट्स संशोधन (%में) | 5% | 5% | |
| | 25% | 25% | |
| $(f_o - f_e)^2$ | 625% | 625% | |
| $\frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$ | 12·5 | 12·5 | |

$$\chi^2 = 12{\cdot}5 + 12{\cdot}5 = 25$$

काई-वर्ग ($\chi^2$) के प्रतिशत में प्राप्त मान को मूल संख्या में परिवर्तित करने का सूत्र–

$$\chi^2\left(\frac{N}{100}\right) \qquad \text{....सूत्र (6)}$$

प्रस्तुत समस्या में $\chi^2$ का प्रतिशत में मान 25 है, अतएव मूल आँकड़ों में यह मान होगा–

$$\frac{25\times10}{100} = 2{\cdot}5$$

$$d.f. = 1$$

1 d. f. पर सार्थकता के लिए $\chi^2$ का आवश्यक मान निम्नलिखित होना चाहिए–

5% स्तर पर = 3·84

1% स्तर पर = 6·635

यहाँ प्राप्त $\chi^2$ का मान उपरोक्त दोनों मानों से कम है, अतएव यहाँ निराकरणीय परिकल्पना (Null Hypothesis) सत्य है, और यह कहना पड़ेगा कि क्रिकेट कप्तान के निर्णय संयोगवश ही अनुकूल रहे हैं।

**टिप्पणी**–यहाँ ध्यान रखने योग्य तथ्य यह है कि क्रिकेट कप्तान का निर्णय केवल 10 मैचों पर आधारित है, जिसमें उसके 8 बार टॉस (Toss) जीतने का श्रेय केवल संयोग (Chance) को ही है, कप्तान को नहीं। यदि कप्तान 100 में से 80 बार टॉस जीतता है, तथा केवल 20 बार ही टॉस हारता है, तब $\chi^2$ का मान 2·5 न रहकर 25 हो जायेगा। उस स्थिति में टॉस जीतने का श्रेय निश्चित रूप से कप्तान को मिलेगा। तब केवल संयोग के आधार पर ही कप्तान के इतने अधिक अनुकूल निर्णयों (अर्थात् 80% अनुकूल निर्णयों) की व्याख्या करना अत्यन्त कठिन बात होगी। सैद्धांतिक रूप से निस्सन्देह 2 तथा 8 में वही अनुपात है जो कि 20 तथा 80 में है, परन्तु प्रसम्भाव्यता सिद्धान्त में ये दोनों बिल्कुल अलग-अलग घटनायें हैं। अतः काई-वर्ग परीक्षण में प्रेक्षित आवृत्तियों ($f_o$) को प्रतिशत में परिवर्तित करके $\chi^2$ के मान की गणना करना त्रुटिपूर्ण रहता है, और यदि ऐसा करना ही पड़े तब प्राप्त $\chi^2$ के मान को सूत्र द्वारा मूल संख्या में परिवर्तित करना आवश्यक होता है।

## 3. काई-वर्ग ($\chi^2$) तथा स्वतन्त्रता की परिकल्पना (Hypothesis of Independence)

अभी तक हमने काई-वर्ग ($\chi^2$) परीक्षण का अध्ययन इस उद्देश्य से किया है कि क्या दो घटनाओं के मध्य प्रेक्षित आवृत्तियाँ (Observed Frequencies) तथा प्रत्याशित आवृत्तियों (Expected Frequencies) में समानता (Agreement) है, या सार्थक विचलन (Significant Divergence) है ? अभी तक के अध्ययन में प्रेक्षित आवृत्तियों का आधार प्रायः एक चर ही रहा है, इसके अतिरिक्त ऐसे चर के आधार एक से अधिक भी हो सकते हैं। ऐसी स्थिति में, चर के स्वरूप पर कोई प्रतिबन्ध नहीं रहता और ऐसी परिकल्पना को स्वतन्त्रता की परिकल्पना (Hypothesis of Independence) कहा जाता है। इसके अन्तर्गत एक चर कई भागों में वितरित हो सकता है, तथा उन भागों के समरूप दूसरे प्रेक्षित चर भी हो सकते हैं। इस प्रकार की सारणी (Table) को आसंग सारणी (Contingency Table) कहते हैं। स्पष्टता के लिए आगे दिये गये उदाहरण को देखिये।

**उदाहरण 8. एक कक्षा में लड़के व लड़कियों की तीन रंगों–नारंगी, बैंगनी तथा गुलाबी की पसन्द जानने के लिए एक अध्ययन किया गया। अध्ययन के परिणाम नीचे दिये गये हैं, बताइये क्या लड़के व लड़कियों की रंग-पसन्द में सार्थक अन्तर है ?**



**तालिका 16**

| लिंग ↓ / रंग → | नारंगी | बैंगनी | गुलाबी | योग |
|---|---|---|---|---|
| लड़कियाँ | 18 | 20 | 34 | 72 |
| लड़के | 16 | 36 | 20 | 72 |
| योग | 34 | 56 | 54 | 144 |

**हल**–प्रस्तुत उदाहरण में दिये गये तीनों रंगों–नारंगी, बैंगनी तथा गुलाबी के प्रति लड़कों तथा लड़कियों ने अपनी-अपनी पसन्द व्यक्त की है। प्रेक्षित आवृत्तियों ($f_o$) के अवलोकन से ज्ञात होता है, दोनों की पसन्द में अन्तर है ? प्रश्न यह है कि यह अन्तर संयोगवश (Due to Chance) है अथवा यह अन्तर सार्थक (Significant) है ? इसकी जाँच के लिए हमें काई-वर्ग ($\chi^2$) परीक्षण का ही प्रयोग करना पड़ेगा।

इस स्थिति में प्रत्याशित आवृत्तियाँ ज्ञात करने के लिए हम लड़कों तथा लड़कियों की संख्या का योग लेते हैं, तथा प्रत्येक रंग के लड़के व लड़कियों की संयुक्त पसन्द के आधार पर दोनों लिंगों (Sexes) के लिए अलग-अलग प्रत्याशित आवृत्तियाँ निकालते हैं। प्रस्तुत उदाहरण में लड़कों व लड़कियों की संख्या (72 + 72) = 144 है। इस संख्या में 18 + 16 = 34 नारंगी, 20 + 36 = 56 बैंगनी तथा 34 + 20 = 54 लड़के-लड़कियाँ गुलाबी रंग को पसन्द करते हैं। अतः यहाँ प्रत्येक लिंग के लिए प्रत्याशित आवृत्तियाँ ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित गणना करते हैं–

जबकि 144 की संख्या में नारंगी रंग की पसन्द 34 की है

तब 72 की " " " " " $\frac{34\times72}{144}$ की होगी

= 17 की होगी

दूसरे जबकि 144 की संख्या में बैंगनी रंग की पसन्द 56 की है

तब 72 की संख्या " " " $\frac{56\times72}{144}$ की होगी

= 28 की होगी

इसी प्रकार जबकि 144 की संख्या में गुलाबी रंग की पसन्द 54 की है

तब 72 " " " " " $\frac{54\times72}{144}$ की होगी

= 27 की होगी

चूँकि प्रस्तुत उदाहरण में लड़के व लड़कियों की संख्या समान है, अतएव दोनों के लिए तीनों रंगों की पसन्द के लिए अग्रलिखित प्रत्याशित आवृत्तियाँ हुईं–

**तालिका 17**

| लिंग ↓ / रंग → | | नारंगी | बैंगनी | गुलाबी | योग |
|---|---|---|---|---|---|
| लड़कियाँ | $f_e$ | 17 | 28 | 27 | = 72 |
| लड़के | $f_e$ | 17 | 28 | 27 | = 72 |

काई-वर्ग ($\chi^2$) का मान ज्ञात करने के लिए शेष गणना निम्नलिखित होगी—

| लिंग ↓ / रंग → | | नारंगी | बैंगनी | गुलाबी | योग |
|---|---|---|---|---|---|
| लड़कियाँ | $f_o$ | 18 | 20 | 34 | 72 |
| | $f_e$ | 17 | 28 | 27 | 72 |
| | $f_o - f_e$ | 1 | 8 | 7 | |
| | $(f_o - f_e)^2$ | 1 | 64 | 49 | |
| | $\frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$ | ·06 | 2·29 | 1·82 | |
| लड़के | $f_o$ | 16 | 36 | 20 | 72 |
| | $f_e$ | 17 | 28 | 27 | 72 |
| | $f_o - f_e$ | 1 | 8 | 7 | |
| | $(f_o - f_e)^2$ | 1 | 64 | 49 | |
| | $\frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$ | ·06 | 2·29 | 1·82 | |

यहाँ $\chi^2 = \cdot 06 + 2\cdot 29 + 1\cdot 82 + 2\cdot 29 + 1\cdot 82$

$= 8\cdot 34$

$$\text{d. f.} = (r - 1)(c - 1) = (2 - 1)(3 - 1)$$

$$= 1 \times 2 = 2$$

2 d. f. सार्थकता के लिए आवश्यक $\chi^2$ का मान।

5% विश्वास के स्तर पर = 5·99

1% विश्वास के स्तर पर = 9·21

प्रस्तुत उदाहरण में हम देखते हैं कि प्राप्त काई-वर्ग ($\chi^2$) का मान विश्वास के 5% स्तर पर सार्थक है, परन्तु विश्वास के 1% स्तर पर सार्थक नहीं है। अतएव हम विश्वास के 5% स्तर पर (at 5% Level of Confidence) यहाँ निराकरणीय परिकल्पना (Null Hypothesis) को अस्वीकृत कर देते हैं, और यह विश्वास व्यक्त करेंगे कि लड़के व लड़कियों की रंग पसन्द में—कम से कम जहाँ तक नारंगी, बैंगनी तथा गुलाबी रंग का सम्बन्ध है, सार्थक अन्तर देखने में आते हैं।



इसी प्रकार आसंग सारणी (Contingency Table) 3 × 3 की भी हो सकती है। उसमें भी काई-वर्ग ($\chi^2$) के मान की गणना की विधि ठीक वैसी ही है, जैसी कि उदाहरण 8 में अपनाई गई है। विस्तृत विवरण के लिए उदाहरण 9 की गणना का अध्ययन कीजिए।

**उदाहरण 9. एक समायोजन अनुसूची (Adjustment Inventory) को बुद्धि-लब्धि के आधार पर विभाजित तीन श्रेणियों के विद्यार्थियों को, समायोजन के स्तर के अध्ययन के लिए प्रशासित किया गया। परीक्षण के परिणाम नीचे दिये गये हैं। बताइये क्या बुद्धि के स्तर की विभिन्नताओं के कारण समायोजन के स्तर पर भी सार्थक विभिन्नतायें देखने में आती हैं ?**

**तालिका 18**

| बुद्धि-लब्धि के स्तर | समायोजन के स्तर | | उच्च | योग |
|---|---|---|---|---|
| | न्यून | सामान्य | | |
| (A) उच्च स्तर | 8 | 16 | 36 | 60 |
| (B) सामान्य स्तर | 12 | 56 | 4 | 72 |
| (C) न्यून स्तर | 25 | 18 | 5 | 48 |
| योग | 45 | 90 | 45 | 180 |

यहाँ पर प्रत्याशित आवृत्तियों को ज्ञात करने की वही विधि प्रयोग में लाई जाती है जो कि उदाहरण 8 में लाई गई है।

**(A) उच्च स्तर के विद्यार्थियों के लिए समायोजन के विभिन्न स्तरों पर प्रत्याशित आवृत्तियों की गणना—**

(i) जबकि 180 की संख्या में न्यून समायोजन वालों की संख्या 45 है

तब 60 " " " " " $= \frac{45 \times 60}{180}$

= 15 होगी

(ii) जबकि 180 की संख्या में सामान्य समायोजन वालों की संख्या 90 है

तब 60 " " " " " $= \frac{90 \times 60}{180}$

= 30 होगी

(iii) इसी प्रकार जबकि 180 की संख्या में उच्च समायोजन वालों की संख्या 45 है

तब 60 " " " " " $= \frac{45 \times 60}{180}$

= 15 होगी

**(B) सामान्य स्तर के विद्यार्थियों के लिए समायोजन के विभिन्न स्तरों पर प्रत्याशित आवृत्तियों ($f_e$) की गणना**

(i) जबकि 180 की संख्या में न्यून समायोजन वालों की संख्या 45 है

तब 72 " " " " " $= \frac{45 \times 72}{180}$

= 18 होगी

(ii) जबकि 180 की संख्या में सामान्य समायोजन वालों की संख्या 90 है

तब 72 " " " " " $= \frac{90 \times 72}{180}$

$= 36$ होगी

(iii) जबकि 180 की संख्या में उच्च स्तर के समायोजन वालों की संख्या 45 है

तब 72 " " " " " $= \frac{45 \times 72}{180}$

$= 18$ होगी

**(C) बुद्धि-लब्धि के आधार पर न्यून स्तर वाले विद्यार्थियों के लिए समायोजन के विभिन्न स्तरों पर प्रत्याशित आवृत्तियों ($f_e$) की गणना—**

(i) जबकि 180 की संख्या में न्यून समायोजन वालों की संख्या 45 है

तब 48 " " " " " $= \frac{45 \times 48}{180}$

$= 12$ होगी

(ii) जबकि 180 की संख्या में सामान्य समायोजन वालों की संख्या 90 है

तब 48 " " " " " $= \frac{90 \times 48}{180}$

$= 24$ होगी

(iii) जबकि 180 की संख्या में उच्च समायोजन वालों की संख्या 45 है

तब 48 " " " " " $= \frac{45 \times 48}{180}$

$= 12$ होगी।

इस प्रकार बुद्धि-लब्धि के आधार पर विद्यार्थियों की विभिन्न श्रेणियों—उच्च, सामान्य तथा न्यून के लिए समायोजन के विभिन्न स्तरों पर प्रत्याशित आवृत्तियाँ (Expected Frequencies) निम्नलिखित होंगी—

| विद्यार्थियों की श्रेणियाँ | समायोजन के स्तर | | उच्च | योग |
|---|---|---|---|---|
| | न्यून | सामान्य | | |
| (A) उच्च स्तर $f_e$ | 15 | 30 | 15 | 60 |
| (B) सामान्य स्तर $f_e$ | 18 | 36 | 18 | 72 |
| (C) न्यून स्तर $f_e$ | 12 | 24 | 12 | 48 |
| योग | 45 | 90 | 45 | 180 |



**(A) उच्च स्तर की श्रेणी के विद्यार्थियों में समायोजन के विभिन्न स्तरों पर काई-वर्ग ($\chi^2$) की गणना—**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $f_o$ | 8 | 16 | | |
| $f_e$ | 15 | 30 | 36 | = 60 |
| $f_o - f_e$ | −7 | −14 | 15 | = 60 |
| $(f_o - f_e)^2$ | 49 | 196 | 21 | |
| $\frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$ | 3·27 | 6·53 | 441 | |
| | | | 29·40 | |

A पंक्ति का $\chi^2$ का मान = 39·20

**(B) सामान्य स्तर की श्रेणी के विद्यार्थियों में समायोजन के विभिन्न स्तरों पर काई-वर्ग ($\chi^2$) की गणना—**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $f_o$ | 12 | 56 | 4 | = 72 |
| $f_e$ | 18 | 36 | 18 | = 72 |
| $f_o - f_e$ | − 6 | 20 | −14 | |
| $(f_o - f_e)^2$ | 36 | 400 | 196 | |
| $\frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$ | 2 | 11·11 | 10·89 | = 24 |

B पंक्ति के लिए $\chi^2$ का मान = 24

**(C) न्यून स्तर की श्रेणी के विद्यार्थियों में समायोजन के विभिन्न स्तरों पर काई-वर्ग ($\chi^2$) की गणना—**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $f_o$ | 25 | 18 | 5 | = 48 |
| $f_e$ | 12 | 24 | 12 | = 48 |
| $f_o - f_e$ | 13 | −6 | −7 | |
| $(f_o - f_e)^2$ | 169 | 36 | 49 | |
| $\frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$ | 14·08 | 1·50 | 4·08 | = 19·66 |

C पंक्ति के लिए $\chi^2$ का मान = 19·66

समस्त पंक्तियों के लिए $\chi^2$ के मानों का योग = 39·20 + 24 + 19·66

= 82·86

$$d.f = (r - 1)(c - 1) = (3 - 1)(3 - 1)$$

$$= 2 \times 2 = 4$$

4 d. f. पर सार्थकता के लिए $\chi^2$ का आवश्यक मान :

5% विश्वास के स्तर पर = 9·49

1% विश्वास के स्तर पर = 13·28

प्रस्तुत समस्या में प्राप्त काई-वर्ग ($\chi^2$) का मान (89·52) उपरोक्त दोनों मानों से बहुत अधिक है, इस कारण यहाँ निराकरणीय परिकल्पना को 1% विश्वास के स्तर पर अस्वीकृत किया जाता है तथा यह मान लिया जाता है कि बुद्धि-लब्धि के आधार पर विद्यार्थियों की विभिन्न श्रेणियों तथा उनके आधार पर समायोजन के विभिन्न स्तरों में सार्थक अन्तर रहता है, अर्थात् बुद्धि-लब्धि का स्तर समायोजन के स्तर को सार्थक रूप से प्रभावित करता है।

**उदाहरण 9.1** निम्नलिखित सम्भाव्यता सारणी से $\chi^2$ की गणना कीजिए।

**तालिका 19**

| मानसिक स्तर | बहिर्मुखी | उभयमुखी | अन्त :मुखी | योग |
|---|---|---|---|---|
| सामान्य से उच्च | 10 | 30 | 20 | 60 |
| सामान्य | 20 | 40 | 20 | 80 |
| सामान्य से निम्न | 20 | 20 | 20 | 60 |
| योग | 50 (a) | 90 (b) | 60 (c) | N = 200 |

**हल**—सर्वप्रथम $f_o$ (प्रेक्षित आवृत्तियों) के आधार पर $f_e$ (प्रत्याशित आवृत्ति) प्रत्येक प्रकोष्ठ (Cell) की निर्धारित करते हैं।

इसका सूत्र है— $f_e = \frac{(\Sigma fc)(\Sigma fr)}{N}$

| (a) | (b) | (c) |
|---|---|---|
| $\frac{50\times60}{200} = 15$ | $\frac{90\times60}{200} = 27$ | $\frac{60\times60}{200} = 18$ |
| $\frac{50\times80}{200} = 20$ | $\frac{90\times80}{200} = 36$ | $\frac{60\times80}{200} = 24$ |
| $\frac{50\times60}{200} = 15$ | $\frac{90\times60}{200} = 27$ | $\frac{60\times60}{200} = 18$ |

$\chi^2$ की गणना— $\chi^2 = \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$

| (a) | (b) | (c) |
|---|---|---|
| $\frac{(10-15)^2}{15} = 1.67$ | $\frac{(30-27)^2}{27} = .33$ | $\frac{(20-15)^2}{15} = 1.67$ |
| $\frac{(20-20)^2}{20} = 0$ | $\frac{(40-36)^2}{36} = .44$ | $\frac{(20-27)^2}{27} = 1.81$ |
| $\frac{(20-15)^2}{15} = 1.67$ | $\frac{(20-27)^2}{27} = .67$ | $\frac{(20-18)^2}{18} = .22$ |

Total $\chi^2 = 1.67 + 0 + 1.67 + .33 + .44 + 1.81 + .22 + .67 + .22 = 7.03$

$$df = (r-1)(C-1)$$
$$= (3-1)(3-1)$$
$$= 2 \times 2$$
$$= 4$$
$$.05 = 9.44$$
$$.01 = 13.28$$

प्राप्त $\chi^2$ मूल्य = 7.03 $\chi^2$ सारणी के 4*df* पर .05 तथा .01 स्तर पर प्राप्त मूल्यों 9.49 तथा 13.28 से तुलनात्मक दृष्टि से अधिक है अर्थात् सार्थक अन्तर है और नल परिकल्पना अस्वीकार



कर दी जाती है साथ ही यह मान लिया जाता है कि मानसिक स्तर एवं व्यक्तित्व प्रकारों में अन्तर दृश्यगत ही नहीं व्यक्ति वास्तविक भी है। इस प्रकार यह कहा जा सकता है कि मानसिक स्तर व्यक्तित्व को प्रभावित करता है।

**आसंग सारणी (Contingency Table) द्वारा आसंग गुणांक (Co-efficient of Contingency) ज्ञात करना।**

प्रोफेसर पीयरसन के अनुसार $\chi^2$ का आसंग गुणांक (Co-efficient of Contingency or C) निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है—

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + N}} \quad \text{.... सूत्र (7)}$$

उदाहरण 9 में $\chi^2$ का मान 89·52 है तथा N = 180 के है, अतएव

यहाँ

$$C = \sqrt{\frac{89\cdot52}{89\cdot52+180}} = \sqrt{\frac{89\cdot52}{269\cdot52}}$$
$$= \sqrt{\cdot3321} \text{ अथवा } 0\cdot5763$$
$$= \cdot58$$

**काई-वर्ग परीक्षण** ($\chi^2$-Test) **के उपयोग की परिसीमायें**—काई-वर्ग परीक्षण के अनेक उपयोग हैं, फिर भी इसका प्रयोग सोच-समझ के साथ ही करना पड़ता है। इसके प्रयोग के लिए निम्नलिखित बातों का ध्यान रखना चाहिए—

(1) प्रथम, जब कभी परीक्षण में प्रेक्षित आवृत्तियाँ ($f_o$) या प्रत्याशित आवृत्तियाँ ($f_e$) की संख्या किसी एक कोष्ठिका (Cell) में 5 से कम रहती है, उससे $\chi^2$ के मान पर दूषित प्रभाव पड़ता है। अतएव जब कभी ऐसा देखने में आये, उस स्थिति में दी गई संख्या को बढ़ाने का प्रयास किया जाना चाहिए; या फिर, येट्स संशोधन का प्रयोग करना चाहिए।

(2) दूसरे, प्रेक्षित आवृत्तियों ($f_o$) की संख्या (N) बड़ी (Large) होनी चाहिए, अथवा कम से कम 30 होनी चाहिए। ऐसा करने से प्रेक्षित आवृत्तियों ($f_o$) तथा प्रत्याशित आवृत्तियों ($f_e$) के मानों (Values) के प्रसामान्य रूप से वितरित (Normally Distributed) होने की प्रसम्भाव्यता बढ़ जाती है।

(3) तीसरे, काई-वर्ग परीक्षण में मौलिक संख्याओं (Absolute Numbers) का ही उपयोग होना चाहिए, प्रतिशत का नहीं। यदि प्रतिशत का प्रयोग करना ही पड़े, उस स्थिति में प्राप्त $\chi^2$ के मान को भी मौलिक संख्या में परिवर्तित करना नितान्त आवश्यक है।

(4) चौथे, काई-वर्ग परीक्षण के आधार पर केवल चरों (Variables) में साहचर्य (Association) का ही पता लगता है, लेकिन ऐसे साहचर्य से किसी कारणता (Causation) से सम्बन्ध का पता नहीं लगता है।

(5) पाँचवें, काई-वर्ग परीक्षण द्वारा प्राप्त आसंग गुणांक का मान (Value of Co-efficient of Contingency) प्राय: सीमित रहता है। उदाहरणत: 2 × 2 की आसंग सारणी में यह मान ·707 से अधिक नहीं रहता। इसी प्रकार 3 संवर्गों (Categories) के लिए यह मान क्रमश: ·816 से, तथा 4, 5, 6, 7 तथा 10 संवर्गों (Categories) के लिए यह मान क्रमश: ·866, ·894, ·913, ·926 तथा ·949 से अधिक नहीं हो सकता। इन परिसीमाओं के कारण विभिन्न अध्ययनों के शुद्ध व तुलनात्मक अध्ययन में कठिनाई उत्पन्न होती है।

## अन्य अप्राचल अथवा वितरण युक्त विधियाँ
## (OTHER NON-PARAMETRIC OR DISTRIBUTION FREE METHODS)

### मध्यांक परीक्षण (The Median Test)

इस परीक्षण के अन्तर्गत किसी एक स्वतन्त्र चर (Independent Variable) के प्रभाव का अध्ययन करने के लिए दो समूहों—एक प्रायोगिक समूह (Experimental Group) तथा दूसरा नियन्त्रित समूह (Control Group) का तुलनात्मक अध्ययन किया जाता है। तुलनात्मक अध्ययन के लिए सबसे पहले दो समूहों के किसी एक दिये गये परीक्षण में प्राप्तांकों (Scores) को एक समूह में मिला लिया जाता है और इस प्रकार दोनों समूहों के प्राप्तांकों का एक संयुक्त (उभयनिष्ठ) मध्यांक (Common Median) ज्ञात पर लिया जाता है। इस परीक्षण की यह कल्पना (Assumption) है कि यदि दोनों समूहों के प्राप्तांकों में कोई अन्तर नहीं है, व दोनों समूह एक ही जनसंख्या का प्रतिनिधित्व करते हैं, तथा दोनों समूहों की इकाइयों का चयन संयोगिक प्रतिदर्श (Random Sampling) पर आधारित है, तब दोनों समूहों के प्राप्तांकों (Scores) का वितरण संयुक्त मध्यांक (Common Median) के दोनों ओर—धनात्मक दिशा की ओर (On Positive Side) तथा ऋणात्मक पक्ष की ओर (On Negative Side) एक समान या लगभग एक ही समान रहना चाहिए। इस परीक्षण में निराकरणीय परिकल्पना (Null Hypothesis) का यही आधार है।

दूसरे चरण में, संयुक्त मध्यांक ज्ञात करने के पश्चात्, इस विधि के अन्तर्गत दोनों समूहों के प्राप्तांकों (Scores) को दो श्रेणियों में विभाजित किया जाता है। वे प्राप्तांक जिनका मान संयुक्त मध्यांक (Common Median) से अधिक रहता है, उनके पहले धनात्मक चिन्ह (+ का Sign) लगा दिया जाता है, तथा जिन प्राप्तांकों का मान संयुक्त मध्यांक से कम रहता है, उनके पहले ऋणात्मक चिन्ह (– का Sign) लगा दिया जाता है।

तीसरे चरण में, दोनों समूहों के धनात्मक (+) तथा ऋणात्मक (–) वाले प्राप्तांकों का अलग-अलग योग ज्ञात कर लिया जाता है, और इस प्रकार इस परीक्षण के लिए हमारे पास 2 × 2 की सारणी तैयार हो जाती है। विस्तृत अध्ययन के लिए निम्नलिखित उदाहरण का अध्ययन कीजिए।

**उदाहरण 10. दर्पण आरेखन (Mirror Drawing) के एक प्रयोग में अभ्यास (Practice) के प्रभाव का अध्ययन करने के लिए 30 विद्यार्थियों को दो तुल्यात्मक समूहों (Matched Groups) में वितरित किया गया। वास्तविक प्रयोग से पूर्व प्रथम समूह (A) को दर्पण आरेखन उपकरण (Mirror Drawing Apparatus) पर पर्याप्त अभ्यास कराया गया, परन्तु द्वितीय समूह (B) को ऐसा कोई अवसर नहीं दिया गया और (और न ही उसे यह पता लगने दिया गया कि A समूह को प्रयोग से सम्बन्धित पूर्वाभ्यास कराया गया है) इसके पश्चात् दोनों समूहों को प्रयोग (Experiment) दिया गया। दोनों समूहों के विद्यार्थियों की त्रुटियों की संख्या नीचे दी गई है। अध्ययनकर्त्ता ने अध्ययन में निराकरणीय परिकल्पना (Null Hypothesis) की रचना की है। बताइये क्या अध्ययनकर्त्ता की निराकरणीय परिकल्पना यहाँ सत्य है ?**

**टिप्पणी**—प्रयोग के मध्य में B समूह के दो विद्यार्थियों ने पेन्सिल टूट जाने के कारण प्रयोग बीच में ही छोड़ दिया, इस कारण समूह A तथा समूह B में विद्यार्थियों की संख्या क्रमशः 15 व 13 रह गई। अतः केवल 28 विद्यार्थियों की त्रुटियों को क्रमशः आगे दिया गया है—



**तालिका 20**

| Group A | Group B |
|---|---|
| – 7 | + 12 |
| – 9 | – 10 |
| – 6 | + 16 |
| – 8 | + 15 |
| – 9 | + 18 |
| + 11 | + 14 |
| – 7 | + 16 |
| – 8 | + 13 |
| – 10 | + 12 |
| – 9 | + 16 |
| + 11 | + 15 |
| – 7 | – 10 |
| – 6 | + 17 |
| – 5 | N = 13 |
| + 12 | |
| N = 15 | |

संयुक्त मध्यांक (Common Median) = 10·5

**तालिका 21**

| समूह | (+) प्राप्त करने वालों की संख्या | (–) प्राप्त करने योग वालों की संख्या | |
|---|---|---|---|
| A प्रायोगिक | A 3 | 12 B | 15 |
| B नियन्त्रित | C 11 | 2 D | 13 |
| योग | 14 | 14 | 28 |

**टिप्पणी**—(i) मध्यांक परीक्षण के अन्तर्गत प्रायोगिक समूह तथा नियन्त्रित समूह की संख्या (N) अलग-अलग हो सकती है।

(ii) यहाँ देखिये कि उपरोक्त 2 × 2 सारणी में A Group में प्रत्याशित आवृत्तियाँ संयोग के आधार पर (+) तथा (–) वाली कोष्ठिकाओं (Cells) में क्रमश : 7·5 तथा 7·5 होनी चाहिए थी, परन्तु यहाँ प्रेक्षित आवृत्तियाँ क्रमशः 3 तथा 12 हैं। इसी प्रकार, B समूह के लिए (+) तथा (–) वाली कोष्ठिकाओं (Cells) में प्रत्याशित आवृत्तियाँ संयोग के आधार पर 6·5 तथा 6·5 होनी चाहिए थीं, जबकि यहाँ प्रेक्षित आवृत्तियाँ क्रमशः 11 व 12 हैं।

प्रस्तुत उदाहरण में $\chi^2$ का मान निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है—

$$\chi^2 = \frac{N[|AD-BC|-N/2]^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)}$$

**टिप्पणी**—उपरोक्त सूत्र को 2 × 2 सारणी में उस समय प्रयोग में लाया जाता है, जबकि किसी

एक कोष्ठिका (Cell) में आवृत्तियों का मान बहुत कम (Very Small) होता है, अर्थात् 5 या इससे भी कम रहता है। यदि प्रत्येक कोष्ठिका (Cell) में आवृत्तियों की संख्या 10 से अधिक रहती है, तब अपेक्षाकृत निम्नलिखित सरल सूत्र का प्रयोग किया जाता है–

$$\chi^2 = \frac{N(AD-BC)^2}{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)} \quad \text{....सूत्र (8)}$$

प्रस्तुत उदाहरण में आसंग सारणी (Contingency Table) की दो कोष्ठिकाओं में आवृत्तियों की संख्या 5 से कम है, अतएव यहाँ पर हमें पहले वाले $\chi^2$ के अधिक शुद्ध सूत्र का प्रयोग करना पड़ेगा।

2 × 2 सारणी के अनुसार,

$A + B = 3 + 12 = 15$ $\quad$ $A + C = 3 + 11 = 14$

$C + D = 11 + 2 = 13$ $\quad$ $B + D = 12 + 2 = 14$

$AD = 3 \times 2 = 6$ $\quad$ $BC = 12 \times 11 = 132$

$N = A + B + C + D = 3 + 12 + 11 + 2 = 28$

इन संख्याओं को सूत्र में रखने पर–

$$\chi_c^2 = \frac{28(|6-132|-28/2)^2}{15\times13\times14\times14}$$

$$= \frac{28(126-14)^2}{15\times13\times14\times14}$$

$$= \frac{28\times112\times112}{15\times13\times14\times14} = \frac{35/232}{38220}$$

= 9·19 दो दशमलव तक

$$d.f. = (c-1)(r-1)$$

$$= (2-1)(2-1) = 1$$

1 d. f. पर सार्थकता के लिए $\chi^2$ का आवश्यक मान–

5% विश्वास के स्तर पर = 3·84

1% विश्वास के स्तर पर = 6·635

प्रस्तुत उदाहरण में प्राप्त $\chi^2$ का मान (9·19) 1% विश्वास के स्तर पर दिये गये आवश्यक मान 6·635 से अधिक है, अतएव यहाँ निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकृत (Reject) किया जाता है, और यह मानना पड़ेगा कि पूर्वाभ्यास के स्वतन्त्र चर (Independent Variable) के प्रभाव के कारण दोनों समूहों–प्रायोगिक समूह तथा नियन्त्रित समूह की सम्प्राप्ति (Performance) में सार्थक अन्तर है।

प्रस्तुत समस्या में अध्ययनकर्त्ता ने निराकरणीय परिकल्पना (Null Hypothesis) को परीक्षण का आधार बनाया था। ऐसी स्थिति में वह एक धनात्मक परिकल्पना (Positive Hypothesis) की रचना भी कर सकता था, उस स्थिति में परिकल्पना का स्वरूप निम्नलिखित होता–

'पूर्वाभ्यास (I. V.) के प्रभाव के कारण प्रायोगिक समूह की सम्प्राप्ति (Performance) नियन्त्रित समूह की अपेक्षा सार्थक रूप से (Significantly) श्रेष्ठ (Superior) है।'

इस स्थिति में हमारे परीक्षण का स्वरूप एक पक्षीय (One-tailed) होता और इसी स्थिति में $\chi^2$ की सारणी में दी गई 1d.f. पर 10% वाला $\chi^2$ का मान (2·706) 5% विश्वास के स्तर पर तथा 2% वाला $\chi^2$ का मान (5·412) 1% विश्वास के स्तर पर सार्थक माना जायेगा।



मध्यांक परीक्षण (Median Test) का उपयोग दो से अधिक समूहों पर भी किया जा सकता है। उस स्थिति में सार्थकता की जाँच के लिए तीन या तीन से अधिक समूहों का पहले संयुक्त मध्यांक (Common Median) ज्ञात करना पड़ेगा। अब यदि हमने परीक्षण में तीन समूहों को लिया है तब हमें 2×3 की आसंग सारणी[1] (Contingency Table) तैयार करनी पड़ेगी और फिर उसके आधार पर $\chi^2$ का मान ज्ञात करना पड़ेगा, और उस स्थिति में उदाहरण 8 में दी गयी विधि के आधार पर $\chi^2$ का मान ज्ञात करना पड़ेगा।

सार्थकता के मान के लिए दी गयी $\chi^2$ की सारिणी को ही देखना होगा।

### तालिका 22

**आसंग तालिका (Contingency Table)**

| | समूह X | समूह Y | समूह Z | योग |
|---|---|---|---|---|
| + Mdn वाली Σf | 7 | 6 | 4 | 17 |
| – Mdn वाली Σf | 5 | 9 | 6 | 20 |
| योग | 12 | 15 | 10 | 37 |

समूह X में 12 की संख्या है जिनमें 7 की संख्या संयुक्त मध्यांक से ऊपर है तथा 5 की संयुक्त मध्यांक से कम है। इसी प्रकार समूह Y तथा Z की कुल संख्या क्रमशः 15 व 10 है तथा मध्यांक से उनके विचलन यथास्थान अंकित हैं। कुल संख्या 37 है।

## चिन्ह परीक्षण (Sign Test)

अप्राचल विधियों (Non-Parametric Methods) अथवा वितरण-युक्त विधियों (Distribution Free Methods) में चिन्ह परीक्षण (Sign Test) एक अत्यन्त सरल विधि है। इस विधि को ज्ञात करने का श्रेय डिक्सन तथा मूड (1946) को है। इस परीक्षण में आँकड़े (Data) प्रायः दो समूहों से सम्बन्धित रहते हैं, जिनमें एक समूह प्रायोगिक (Experimental) तथा दूसरा नियन्त्रित समूह (Control Group) होता है। या फिर एक ही समूह (Single Group) को दो बार अलग-अलग अभिक्रियायें (Treatments) दी जाती हैं तथा सम्बन्धित व्यक्तियों (Subjects) की दोनों स्थितियों (Conditions) के प्रेक्षित आँकड़ों (Observed Data) को युग्मों (Pairs) में प्रस्तुत किया जाता है। इस प्रकार प्राप्त आँकड़ों में अन्तर की सार्थकता की जाँच चिन्ह (Sign) के आधार पर की जाती है, क्योंकि दोनों स्थितियों (Conditions) में अलग-अलग व्यक्तियों के आँकड़े प्रायः अलग-अलग ही होंगे। यहाँ एक स्थिति में आँकड़ों को दूसरी स्थिति के आँकड़ों में से घटाया जाता है, और फिर यह देखा जाता है, कि प्राप्त मान धनात्मक है अथवा ऋणात्मक है, अतएव आगे वास्तविक प्राप्त परिणाम में शेष संख्या न लिखकर केवल धनात्मक (+) या ऋणात्मक (–) ही लिखा जाता है। यहाँ यह स्पष्ट है कि जब घटाये जाने पर शेष मान धनात्मक रहता है तब वास्तविक परिणाम में धनात्मक (+) का चिन्ह तथा जब शेष मान ऋणात्मक संख्या में रहता है, वहाँ ऋणात्मक (–) का चिन्ह दिया जाता है। इस विधि की यह मान्यता (Assumption) है कि यदि दोनों स्थितियों (Conditions) या समूहों में कोई अन्तर नहीं है, तब दोनों समूहों या स्थितियों के अन्तर (Differences) समान रूप से ऋणात्मक तथा धनात्मक दिशा में वितरित रहने चाहिए अर्थात

1. दो से अधिक समूहों में मध्यांक विधि (Median Test) द्वारा उपरोक्त सारणी तैयार करनी पड़ती है। यहाँ हमने परीक्षण के लिए तीन समूहों X, Y, तथा Z लिए है।

मध्यांक परीक्षण (Median Test) का उपयोग दो से अधिक समूहों पर भी किया जा सकता है। उस स्थिति में सार्थकता की जाँच के लिए तीन या तीन से अधिक समूहों का पहले संयुक्त मध्यांक (Common Median) ज्ञात करना पड़ेगा। अब यदि हमने परीक्षण में तीन समूहों को लिया है तब हमें 2×3 की आसंग सारणी[1] (Contingency Table) तैयार करनी पड़ेगी और फिर उसके आधार पर $\chi^2$ का मान ज्ञात करना पड़ेगा, और उस स्थिति में उदाहरण 8 में दी गयी विधि के आधार पर $\chi^2$ का मान ज्ञात करना पड़ेगा।

सार्थकता के मान के लिए दी गयी $\chi^2$ की सारिणी को ही देखना होगा।

## तालिका 22

### आसंग तालिका (Contingency Table)

| | समूह X | समूह Y | समूह Z | योग |
|---|---|---|---|---|
| + Mdn वाली Σf | 7 | 6 | 4 | 17 |
| - Mdn वाली Σf | 5 | 9 | 6 | 20 |
| योग | 12 | 15 | 10 | 37 |

समूह X में 12 की संख्या है जिनमें 7 की संख्या संयुक्त मध्यांक से ऊपर है तथा 5 की संयुक्त मध्यांक से कम है। इसी प्रकार समूह Y तथा Z की कुल संख्या क्रमशः 15 व 10 है तथा मध्यांक से उनके विचलन यथास्थान अंकित हैं। कुल संख्या 37 है।

## चिन्ह परीक्षण (Sign Test)

अप्राचल विधियों (Non-Parametric Methods) अथवा वितरण-युक्त विधियों (Distribution Free Methods) में चिन्ह परीक्षण (Sign Test) एक अत्यन्त सरल विधि है। इस विधि को ज्ञात करने का श्रेय डिक्सन तथा मूड (1946) को है। इस परीक्षण में आँकड़े (Data) प्रायः दो समूहों से सम्बन्धित रहते हैं, जिनमें एक समूह प्रायोगिक (Experimental) तथा दूसरा नियन्त्रित समूह (Control Group) होता है। या फिर एक ही समूह (Single Group) को दो बार अलग-अलग अभिक्रियायें (Treatments) दी जाती हैं तथा सम्बन्धित व्यक्तियों (Subjects) की दोनों स्थितियों (Conditions) के प्रेक्षित आँकड़ों (Observed Data) को युग्मों (Pairs) में प्रस्तुत किया जाता है। इस प्रकार प्राप्त आँकड़ों में अन्तर की सार्थकता की जाँच चिन्ह (Sign) के आधार पर की जाती है, क्योंकि दोनों स्थितियों (Conditions) में अलग-अलग व्यक्तियों के आँकड़े प्रायः अलग-अलग ही होंगे। यहाँ एक स्थिति में आँकड़ों को दूसरी स्थिति के आँकड़ों में से घटाया जाता है, और फिर यह देखा जाता है, कि प्राप्त मान धनात्मक है, अथवा ऋणात्मक है, अतएव आगे वास्तविक प्राप्त परिणाम में शेष संख्या न लिखकर केवल धनात्मक (+) या ऋणात्मक ( – ) ही लिखा जाता है। यहाँ यह स्पष्ट है कि जब घटाये जाने पर शेष मान धनात्मक रहता है तब वास्तविक परिणाम में धनात्मक (+) का चिन्ह तथा जब शेष मान ऋणात्मक संख्या में रहता है, वहाँ ऋणात्मक ( – ) का चिन्ह दिया जाता है। इस विधि की यह मान्यता (Assumption) है कि यदि दोनों स्थितियों (Conditions) या समूहों में कोई अन्तर नहीं है, तब दोनों समूहों या स्थितियों के अन्तर (Differences) समान रूप से ऋणात्मक तथा धनात्मक दिशा में वितरित रहने चाहिए अर्थात

1. दो से अधिक समूहों में मध्यांक विधि (Median Test) द्वारा उपरोक्त सारणी तैयार करनी पड़ती है। यहाँ हमने परीक्षण के लिए तीन समूहों X, Y, तथा Z लिए है।

प्राप्त धनात्मक चिन्हों तथा ऋणात्मक चिन्हों का योग शून्य (Zero) होना चाहिए। परन्तु यदि देखने में यह आये कि धनात्मक चिन्हों (+) का मान अपेक्षाकृत अधिक है, या फिर ऋणात्मक चिन्हों (–) का मान धनात्मक चिन्हों से अधिक है, उस स्थिति में यह स्पष्ट हो जाता है, कि दोनों समूहों, या दोनों स्थितियों (Conditions) में अन्तर है। अब प्रश्न यह उठता है कि सार्थकता के लिए अन्तर की यह मात्रा कितनी होनी चाहिए ? इसका निर्णय करने के लिए दोनों श्रेणी के चिन्हों (+) तथा (–) में पहले यह देखना होता है, कि किस श्रेणी के चिन्ह (Sign) कम हैं, उस मात्रा को हम r के संकेत (Symbol) से व्यक्त करते हैं, तथा प्रेक्षित युग्मों (Observed Pairs) की संख्या (N) के आधार पर दी गयी सारणी के द्वारा r के मान की सार्थकता की जाँच की जाती है। यदि प्राप्त मान सार्थकता के लिए दिये गये विश्वास के विभिन्न स्तरों के मान से अधिक है, तब ऐसे अन्तर को सार्थक नहीं समझा जाता, परन्तु यदि प्राप्त मान सम्बन्धित सारणी में दिये गये किसी एक मान के बराबर रहता है, या फिर उससे कम रहता है, तब यह मानना पड़ता है कि प्राप्त अन्तर सार्थक है। स्पष्ट व्याख्या के लिए निम्नलिखित उदाहरण का अध्ययन कीजिए।

**उदाहरण 1. एक परीक्षण में 17 विद्यार्थियों के प्रतिक्रिया काल (Reaction Time) के मान दो स्थितियों (Conditions)—एक उत्तेजक (Stimulant) तथा दूसरी उदासीन (Depressed) स्थिति में लिए गये हैं। बताइये, क्या यहाँ दोनों स्थितियों के परिणामों में सार्थक अन्तर (Significant Difference) हैं ?**

**तालिका 23**

| विद्यार्थी | उत्तेजक स्थिति में प्रतिक्रिया काल (मिली सेकण्ड में) | उदासीन स्थिति में प्रतिक्रिया काल (मि. से. में) | अन्तर (चिन्ह में) |
|---|---|---|---|
| | (I) | (II) | (D) |
| A | 240 | 320 | – |
| B | 280 | 300 | – |
| C | 260 | 360 | – |
| D | 220 | 240 | – |
| E | 260 | 260 | 0 |
| F | 240 | 260 | – |
| G | 280 | 280 | 0 |
| H | 200 | 240 | – |
| I | 260 | 260 | 0 |
| J | 260 | 240 | + |
| K | 180 | 200 | – |
| L | 240 | 260 | – |
| M | 260 | 240 | + |
| N | 240 | 280 | – |
| O | 220 | 240 | – |
| P | 260 | 300 | – |
| Q | 240 | 280 | – |

धनात्मक (+) संख्या के चिन्ह = 2

ऋणात्मक (–) संख्या के चिन्ह = 12

शून्य (0) संख्या के चिन्ह = 3

समस्त प्रक्षेण युग्मों की संख्या (N) = 17

**टिप्पणी**—प्रस्तुत उदाहरण में एक महत्त्वपूर्ण समस्या यह है कि शून्य मान वाले 3 युग्मों के मान का क्या किया जाय ? स्पष्टतः शून्य मान न तो धनात्मक (+) है, और न यह ऋणात्मक (–) ही है। अतएव शून्य मानों को इन दोनों मानों में साधारणतः नहीं जोड़ा जाता, और ऐसी स्थिति में प्रायः ऐसे प्रेक्षित युग्मों को कुल संख्या (N) में से निकाल दिया जाता है, क्योंकि, यदि ऐसी संख्या 1 या 2 रहती है, तब इसका अन्तिम परिणाम पर कोई विशेष प्रभाव नहीं पड़ता। परन्तु यदि यह संख्या अधिक रहती है, तब आधी शून्य वाली संख्या को धनात्मक (+) चिन्ह में तथा दूसरी आधी संख्या को ऋणात्मक (–) चिन्ह वाली संख्या में लिखा जाना चाहिए। अब यदि इसके पश्चात् भी एक शून्य संख्या शेष रह जाती है, तब उसके ·5 भाग को धनात्मक संख्या में तथा ·5 भाग को ऋणात्मक चिन्ह वाली संख्या में जोड़ देना चाहिए। प्रस्तुत उदाहरण में यहाँ पर ठीक ऐसी ही स्थिति है। यहाँ तीन शून्य मानों में से, 1 शून्य मान को हम धनात्मक चिन्ह संख्या में, तथा 1 शून्य को ऋणात्मक चिन्ह संख्या में जोड़ देते हैं, फिर शेष 1 शून्य संख्या के ·5 भाग को धनात्मक संख्या में तथा ·5 को ऋणात्मक संख्या में जोड़ देते हैं। इस प्रकार उपरोक्त उदाहरण में—

+ के चिन्हों की संख्या = 3·5

– के चिन्हों की संख्या = 3·5 हो जाती है।

यहाँ पर धनात्मक चिन्हों (+ signs) की संख्या ऋणात्मक चिन्हों की अपेक्षा कम है। अतएव यहाँ धनात्मक चिन्हों को ही $r$ का सांकेतिक चिन्ह प्रदान किया जायेगा। (यदि यहाँ पर अपेक्षाकृत ऋणात्मक चिन्हों की संख्या कम रहती तब ऋणात्मक चिन्हों को ही $r$ माना जाता)

अतएव यहाँ पर $r = 3{\cdot}5$

तथा $N = 17$

चिन्ह-परीक्षण सारणी में सार्थकता के लिए $r$ का मान 17 के (N) पर निम्नलिखित होना चाहिए—

1% विश्वास के स्तर पर = 2

5% विश्वास के स्तर पर = 4

10% विश्वास के स्तर पर = 4

यहाँ पर प्राप्त $r$ का मान (3·5) ऊपर दिये गये विश्वास के 5% स्तर पर आवश्यक मान से कम है।

अतएव प्रस्तुत उदाहरण में हम निराकरणीय परिकल्पना (Null Hypothesis) को 5% विश्वास के स्तर पर अस्वीकृत (Reject) करते हैं, तथा यहाँ यह कहना पड़ेगा कि उत्तेजक औषधि तथा उदासीनताजन्य औषधि के कारण उत्पन्न स्थितियों (Conditions) से ही प्रतिक्रिया काल में सार्थक अन्तर देखने में आया है।

चिन्ह-परीक्षण (Sign-Test) की सारणी में 100 तक की संख्या (N) पर $r$ के मानों की सार्थकता के लिए जाँच की जा सकती है। अब यदि संख्या (N) 100 से अधिक हो उस स्थिति में सार्थकता के लिए टी-परीक्षण (t-Test) ही अधिक उपयुक्त रहता है। यहाँ पर यह स्मरण रहना

चाहिए कि चिन्ह-परीक्षण (Sign-Test) का उपयोग कम संख्या (Small-Number) के लिए ही उपयुक्त रहता है, तथा टी-परीक्षण चिन्ह-परीक्षण की अपेक्षा अधिक शक्तिशाली (Powerful) रहता है।

**चिन्ह-परीक्षण** (Sign-Test) **का दूसरी स्थिति में उपयोग**—एक दूसरी स्थिति में भी—जबकि प्रेक्षित संख्या किसी एक आधार पर दो भागों में विभाजित रहती है—चिन्ह-परीक्षण पर्याप्त मात्रा में सरल तथा उपयोगी रहता है। उदाहरण के लिए मान लिया एक कक्षा में 40 विद्यार्थियों पर किये गये एक परीक्षण में यह अध्ययन किया गया है कि विद्यार्थी क्रिकेट मैच की कमेण्ट्री (Commentary) अथवा आँखों देखा हाल सुनना अधिक पसन्द करते हैं, या स्वयं मैदान में क्रिकेट मैच देखना अधिक पसन्द करते हैं। अध्ययन से ज्ञात हुआ कि 26 विद्यार्थी मैच देखना अधिक पसन्द करते हैं, तथा 14 विद्यार्थी मैच की कमेण्ट्री सुनना अधिक पसन्द करते हैं। साधारणत: ऐसी स्थिति में काई-वर्ग परीक्षण का प्रयोग होना चाहिए। परन्तु चिन्ह-परीक्षण के उपयोग से ऐसी किसी गणना की आवश्यकता नहीं पड़ती। केवल प्रेक्षित (Observed) दो संख्याओं में से कम संख्या (Smaller N) को $r$ मान लिया जाता है, और उसकी सार्थकता की जाँच चिन्ह-परीक्षण की सारणी में दोनों संख्याओं छोटी संख्या + बड़ी संख्या के योग के आधार पर की जाती है। स्पष्ट विवरण के लिए आगे दी गयी तालिका को देखिए—

**तालिका 24**

| वह संख्या—जिसे स्वयं मैच देखना अधिक पसन्द है | वह संख्या—जिसे कमेण्ट्री सुनना अधिक पसन्द है | योग |
|---|---|---|
| 26 | 14 | 40 |

छोटी संख्या अथवा $r = 14$

यहाँ $N = 40$

40 (N) पर सार्थकता के लिए आवश्यक $r$ का मान :

10% विश्वास के स्तर पर = 14

5% विश्वास के स्तर पर= 13

1% विश्वास के स्तर पर = 11

प्रस्तुत उदाहरण में अध्ययनकर्त्ता ने निराकरणीय परिकल्पना (Null Hypothesis) की जाँच करना चाहा है [क्योंकि उसने केवल यहाँ यह पता लगाने की कोशिश की है कि विद्यार्थी मैच का आँखों देखा हाल (Commentary) सुनना अधिक पसन्द करते हैं, या स्वयं मैच देखना]। प्राप्त मान के आधार पर यहाँ निराकरणीय परिकल्पना (Null Hypothesis) सत्य है, वैसे इसके अस्वीकृत किये जाने की स्थिति भी यहाँ बहुत निकट है। परन्तु अन्त में यह कहना पड़ेगा कि यहाँ विद्यार्थी-वर्ग समान रूप से ही क्रिकेट मैच की कमेण्ट्री सुनना तथा स्वयं मैच देना पसन्द करते हैं।

अब यदि अध्ययनकर्त्ता की परिकल्पना (Hypothesis) निम्नलिखित होती—

विद्यार्थियों को क्रिकेट मैच की कमेण्ट्री सुनने की अपेक्षा, मैच को स्वयं देखना अधिक पसन्द है।

उस स्थिति में अन्तर की सार्थकता की जाँच का आधार एक सूत्रीय परीक्षण (One-tailed test) होता, और उस स्थिति में प्राप्त $r$ का (14 का) मान 5% विश्वास के स्तर पर सार्थक अन्तर

व्यक्त करता। परन्तु ऐसा निर्णय परिकल्पना की रचना के पहले ही लिया जाना चाहिए था। परिणाम ज्ञात हो जाने के पश्चात् निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकृत करने के लिए नई परिकल्पना की रचना करना वैज्ञानिक मापदण्ड के विपरीत है, तथा ऐसी स्थिति में परिकल्पना में संशोधन करने से अध्ययन में प्रथम प्रकार की त्रुटि (Type I Error) आ जाती है।

अध्ययन कार्य में कभी-कभी प्रेक्षित संख्या बहुत छोटी –10 से भी कम रह जाती है, ऐसी स्थिति में चिन्ह-परीक्षण (Sign-Test) के स्थान पर परिकल्पना की सार्थकता की जाँच द्वि-पद के विस्तार (Binomial Expansion) द्वारा की जानी चाहिए। द्वि-पद विस्तार (Binomial Expansion) के द्वारा इस उपरोक्त उदाहरण में दिये आँकड़ों की सार्थकता की जाँच निम्न प्रकार से की जा सकती है–

प्रस्तुत उदाहरण में 40 की संख्या में–

स्वयं मैच देखने वालों की संख्या = 26

अतः यहाँ $p = 26/40 = \cdot 65$

स्वयं मैच न देखने वालों की संख्या 40 में से 14–

अतः यहाँ $Q = 14/40 = \cdot 35$

संयोग के आधार पर यहाँ 40 विद्यार्थियों में

$$\text{मध्यमान} = 40/2 = 20$$

यहाँ
$$\sigma = \sqrt{Npq}$$
$$= \sqrt{40 \times \cdot 65 \times \cdot 35}$$
$$= \sqrt{9 \cdot 1} = 3 \cdot 01$$

यहाँ
$$Z = \frac{X - M}{\sigma} = \frac{26 - 20}{3 \cdot 01}$$
$$= \frac{6}{3 \cdot 01} = 1 \cdot 99$$

प्रसम्भाव्यता वक्र की सारणी देखने से पता लगता है कि 1·99 σ के बाहर धनात्मक तथा ऋणात्मक दिशाओं में संख्या की प्रसम्भाव्यता (p) = (·5000 – ·4767) तथा (·5000 – ·4767) अथवा ·0233 + ·0233 = ·0466 = ·05 के रहती है।

अतः प्रस्तुत उदाहरण में द्वि-पद विस्तार (Binomial Expansion) के आधार पर क्रिकेट मैच की Commentary सुनने वालों की संख्या तथा स्वयं मैच को देखने वालों की संख्या में 5% विश्वास के स्तर पर सार्थक अन्तर देखने में आता है। चिन्ह-परीक्षण (Sign-Test) के आधार पर भी अन्तर का मान सार्थकता के सन्निकट है, परन्तु सार्थक अन्तर नहीं है। अतः अपेक्षाकृत चिन्ह-परीक्षण यहाँ अधिक शक्तिशाली (Powerful) तथा विश्वसनीय है।

चिन्ह-परीक्षण के द्वारा प्राप्त मानों की सार्थकता की जाँच के लिए सारणी में छोटी संख्याओं के लिए सार्थक मान नहीं दिये गये हैं। (देखिये 1 की संख्या से लेकर 7 की संख्या तक) अतएव ऐसी स्थिति में द्वि-पद विस्तार की ही सहायता से अन्तर की सार्थकता की जाँच की जानी चाहिए।

## चिन्ह परीक्षण के लिए $r$ के विभिन्न क्रान्तिक मूल्यों की तालिका
## (TABLE OF CRITICAL VALUES OF $r$ FOR THE SIGN TEST)
### तालिका 25

| N | 1% | 5% | 10% | N | 1% | 5% | 10% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | — | — | — | 38 | 10 | 12 | 13 |
| 2 | — | — | — | 39 | 11 | 12 | 13 |
| 3 | — | — | — | 40 | 11 | 13 | 14 |
| 4 | — | — | — | 41 | 11 | 13 | 14 |
| 5 | — | — | 0 | 42 | 12 | 14 | 15 |
| 6 | — | 0 | 0 | 43 | 12 | 14 | 15 |
| 7 | — | 0 | 0 | 44 | 13 | 15 | 16 |
| 8 | 0 | 0 | 18 | 45 | 13 | 15 | 16 |
| 9 | 0 | 1 | 1 | 46 | 13 | 15 | 16 |
| 10 | 0 | 1 | 1 | 47 | 14 | 16 | 17 |
| 11 | 0 | 1 | 2 | 48 | 14 | 16 | 17 |
| 12 | 1 | 2 | 2 | 49 | 15 | 17 | 18 |
| 13 | 1 | 2 | 3 | 50 | 15 | 17 | 18 |
| 14 | 1 | 2 | 3 | 51 | 15 | 18 | 19 |
| 15 | 2 | 3 | 3 | 52 | 16 | 18 | 19 |
| 16 | 2 | 3 | 4 | 53 | 16 | 18 | 20 |
| 17 | 2 | 4 | 4 | 54 | 17 | 19 | 20 |
| 18 | 3 | 4 | 5 | 55 | 17 | 19 | 20 |
| 19 | 3 | 4 | 5 | 56 | 17 | 20 | 21 |
| 20 | 3 | 5 | 5 | 57 | 18 | 20 | 21 |
| 21 | 4 | 5 | 6 | 58 | 18 | 21 | 22 |
| 22 | 4 | 5 | 6 | 59 | 19 | 21 | 22 |
| 23 | 4 | 6 | 7 | 60 | 19 | 21 | 23 |
| 24 | 5 | 6 | 7 | 61 | 20 | 22 | 23 |
| 25 | 5 | 7 | 7 | 62 | 20 | 22 | 24 |
| 26 | 6 | 7 | 8 | 63 | 20 | 23 | 24 |
| 27 | 6 | 7 | 8 | 64 | 21 | 23 | 24 |
| 28 | 6 | 8 | 9 | 65 | 21 | 24 | 25 |
| 29 | 7 | 8 | 9 | 66 | 22 | 24 | 25 |
| 30 | 7 | 9 | 10 | 67 | 22 | 25 | 26 |
| 31 | 7 | 9 | 10 | 68 | 22 | 25 | 26 |
| 32 | 8 | 9 | 10 | 69 | 23 | 25 | 27 |
| 33 | 8 | 10 | 11 | 70 | 23 | 26 | 27 |
| 34 | 9 | 10 | 11 | 71 | 24 | 26 | 28 |
| 35 | 9 | 11 | 12 | 72 | 24 | 27 | 28 |
| 36 | 9 | 11 | 12 | 73 | 25 | 27 | 28 |
| 37 | 10 | 12 | 13 | 74 | 25 | 28 | 29 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 75 | 25 | 28 | 29 | 88 | 31 | 34 | 35 |
| 76 | 26 | 28 | 30 | 89 | 31 | 34 | 36 |
| 77 | 26 | 29 | 30 | 90 | 32 | 35 | 36 |
| 78 | 27 | 29 | 31 | 91 | 32 | 35 | 37 |
| 79 | 27 | 30 | 31 | 92 | 33 | 36 | 37 |
| 80 | 28 | 30 | 32 | 93 | 33 | 36 | 37 |
| 81 | 28 | 31 | 32 | 94 | 34 | 37 | 38 |
| 82 | 28 | 31 | 33 | 95 | 34 | 37 | 38 |
| 83 | 29 | 32 | 33 | 96 | 34 | 37 | 39 |
| 84 | 29 | 32 | 33 | 97 | 35 | 38 | 39 |
| 85 | 30 | 32 | 34 | 98 | 35 | 38 | 40 |
| 86 | 30 | 33 | 34 | 99 | 36 | 39 | 40 |
| 87 | 31 | 33 | 35 | 100 | 36 | 39 | 41 |

## क्रम-अन्तर चिन्ह-परीक्षण (Sign Rank Test of Difference)

इस परीक्षण के प्रतिपादक एफ विल्कॉक्सन (1949) हैं। यह विधि चिन्ह-परीक्षण (Sign Test) विधि से अधिक अच्छी है, क्योंकि चिन्ह-परीक्षण में केवल प्रेक्षित युग्मों (Observed Pairs) के अन्तर की व्याख्या केवल धनात्मक (+) तथा ऋणात्मक (–) चिन्हों की गणना के आधार पर ही की जाती है, परन्तु क्रम-अन्तर चिन्ह-परीक्षण (Sign Rank Test of Differences) में दोनों स्थितियों में पहले वास्तविक अन्तरों (Actual Differences) को ज्ञात किया जाता है, फिर इस प्रकार प्राप्त समस्त मानों को चिन्ह का ध्यान न देते हुए केवल उनकी निरपेक्ष मात्रा (Absolute Sizes) के आधार पर ही क्रम (Rank) प्रदान किये जाते हैं। सबसे छोटी मात्रा को प्रथम क्रम (Rank 1) तथा उससे बड़ी मात्रा को क्रम 2 तथा इस प्रकार क्रम संख्या 3, 4 व 5 के क्रम में प्रेक्षित संख्या (N) के आधार पर बढ़ती चली जाती है। जब दो या तीन मानों की संख्या समान (Tied) होती है, तब क्रम संख्या (Rank Order) को भी उसी अनुपात में विभाजित करना होता है। क्रम प्रदान करने के पश्चात् फिर प्रत्येक क्रम के पहले उसका वास्तविक चिन्ह भी लिख दिया जाता है, अर्थात् धनात्मक अन्तरों के क्रमों (Ranks) तथा ऋणात्मक अन्तरों के क्रमों के पहले सम्बन्धित चिन्ह लगा दिये जाते हैं। इसके पश्चात् धनात्मक (+) तथा ऋणात्मक (–) क्रमों को अलग-अलग स्तम्भों में लिख दिया जाता है, तथा उनका अलग-अलग योग ज्ञात कर लिया जाता है। इन दोनों योगों में धनात्मक योग तथा ऋणात्मक योग में जो योग अपेक्षाकृत कम होता है, उस वाले योग को T का सांकेतिक चिन्ह (Symbol) दिया जाता है। T के मान के आधार पर तथा प्रेक्षित संख्या (N) के सन्दर्भ में प्रयोग की दोनों स्थितियों के अन्तर की सार्थकता की जाँच की जाती है।

इस विधि की मान्यता यह है कि यदि प्रयोग की दोनों स्थितियों में कोई अन्तर नहीं है, तब दोनों स्थितियों में प्राप्त अन्तरों के क्रमों का वितरण धनात्मक (+) तथा ऋणात्मक (–) दिशा में समान रूप से वितरित रहना चाहिए और इस प्रकार दोनों स्थितियों के धनात्मक तथा ऋणात्मक चिन्हों का योग शून्य (Zero) होना चाहिए।

प्रयोग में समस्त क्रमों (Ranks) के मध्यमान का योग सूत्र द्वारा निम्नलिखित होना चाहिए–

क्रमों का योग $$(\bar{T}) = \frac{N(N-1)}{4}$$ .....सूत्र (9)

इस प्रकार यदि $T - \bar{T}$ का मान अधिक विचलित रहता है, तब यह मानना पड़ेगा कि ऐसा अन्तर या विचलन (Difference or Deviation) प्रयोग की दोनों स्थितियों के अन्तर के कारण ही

उत्पन्न हुआ है। विलकॉक्सन (Wilcoxon) ने एक ऐसी सारणी का निर्माण किया है, जिसमें सरलतापूर्वक दिये गये T के मान की सार्थकता की जाँच विश्वास के विभिन्न स्तरों पर की जा सकती है। इस विधि के सरल अध्ययन के लिए निम्नलिखित उदाहरण को देखिये।

**उदाहरण 2. ध्यान बोध विस्तार (Span of Apprehension) के एक प्रयोग की दो स्थितियों (Conditions)–स्थिति A तथा स्थिति B में 11 विद्यार्थियों के ध्यान-विस्तार के मान निम्नलिखित हैं। बताइये क्या यहाँ इन दोनों स्थितियों के मानों में सार्थक अन्तर है ?**

**तालिका 26**

| विद्यार्थी | स्थिति (A) | स्थिति (B) | अन्तर (A – B) | + क्रम | – क्रम |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 6 | 11 | – 5 | | – 5 |
| B | 6 | 13 | – 7 | | – 8 |
| C | 5 | 9 | – 4 | | – 4 |
| D | 10 | 13 | – 3 | | – 3 |
| E | 4 | 10 | – 6 | | – 6·5 |
| F | 6 | 16 | – 10 | | – 10 |
| G | 5 | 14 | – 9 | | – 9 |
| H | 8 | 8 | 0 | | – |
| I | 12 | 10 | + 2 | + 2 | |
| J | 9 | 10 | – 1 | | – 1 |
| K | 5 | 11 | – 6 | | – 6·5 |
| | | | | + 2 | |

यहाँ पर अपेक्षाकृत धनात्मक चिन्हों वाले क्रमों (Ranks) की संख्या कम है, अथवा केवल 1 ही है। अतएव इसको सांकेतिक चिन्ह (Symbol) T प्रदान किया जाता है। यहाँ पर 11 विद्यार्थियों की संख्या में एक विद्यार्थी ऐसा है जिसके प्राप्तांक दोनों स्थितियों में समान होने के कारण उसे कोई क्रम (Rank) नहीं दिया गया है। अतएव ऐसे विद्यार्थी की गणना यहाँ नहीं की जाती और उसकी (या ऐसे अन्य विद्यार्थी की) संख्या को कुल संख्या (N) में से घटा दिया जाता है। प्रस्तुत उदाहरण में अब यह संख्या केवल (11 – 1) = 10 रह गई है। अतएव अब हम दोनों स्थितियों के अन्तर की जाँच के लिए आगे दी गयी तालिका 25 में संख्या (N) 10 पर T के मान की सार्थकता की जाँच करते हैं। सारणी में विश्वास के विभिन्न स्तरों पर T का आवश्यक मान निम्नलिखित है–

1% विश्वास के स्तर पर = 2

5% विश्वास के स्तर पर = 3

10% विश्वास के स्तर पर = 6

प्रस्तुत उदाहरण में T का मान 2 है, अतएव सारणी के अनुसार यह मान 1% विश्वास के स्तर पर सार्थक है, अर्थात् यह मान प्रयोग की दोनों स्थितियों में सार्थक अन्तर व्यक्त करता है। इस कारण यहाँ निराकरणीय परिकल्पना (Null Hypothesis) को 1% विश्वास के स्तर पर अस्वीकृत (Reject) कर दिया जाता है।



**तालिका**–विश्वास के विभिन्न स्तरों पर T के सार्थक मान के लिए यहाँ T प्राप्त धनात्मक (+) तथा ऋणात्मक (–) चिन्ह वाले क्रमों के अलग-अलग योगों में अपेक्षाकृत कम योग वाली संख्या (Smaller Sum of Ranks) होती है।

**तालिका 27**

| N | P = ·05 | P = ·02 | P = ·01 |
|---|---|---|---|
| 6 | 0 | ..... | ..... |
| 7 | 2 | 0 | ..... |
| 8 | 4 | 2 | 0 |
| 9 | 6 | 3 | 2 |
| 10 | 8 | 5 | 3 |
| 11 | 11 | 7 | 5 |
| 12 | 14 | 10 | 7 |
| 13 | 17 | 13 | 10 |
| 14 | 21 | 16 | 13 |
| 15 | 25 | 20 | 16 |
| 16 | 30 | 24 | 20 |
| 17 | 35 | 28 | 23 |
| 18 | 40 | 33 | 28 |
| 19 | 46 | 38 | 32 |
| 20 | 52 | 43 | 38 |
| 21 | 59 | 49 | 43 |
| 22 | 66 | 56 | 49 |
| 23 | 73 | 62 | 55 |
| 24 | 81 | 69 | 61 |
| 25 | 89 | 77 | 68 |

## संयुक्त-क्रम विधि (The Composite Rank Method)

किसी एक अध्ययन में प्रयोग की दो स्थितियाँ (Conditions) ऐसी भी हो सकती हैं जबकि प्राप्त आँकड़े युग्मों (Pairs) में न हों। ऐसी स्थिति में क्रम-अन्तर चिन्ह परीक्षण (Sign-Rank Test of Differences) विधि का प्रयोग नहीं किया जा सकता। ऐसी स्थिति में संयुक्त-क्रम विधि (Composite Rank Method) का उपयोग अधिक उपयुक्त रहता है। इस विधि के अन्तर्गत प्रयोग की दोनों स्थितियों में विषयों (Subjects) के प्राप्तांकों (Scores) को एक ही प्रयोग स्थिति के प्राप्तांक मानकर क्रम (Rank) प्रदान किये जाते हैं। अब यहाँ पर कल्पना यह रहती है कि जबकि दोनों स्थितियों में विषयों (Subjects) की संख्या समान है, तथा प्रयोग की दोनों स्थितियाँ (Conditions) यदि समान

हैं, और दोनों स्थितियों में व्यक्तियों के चयन का आधार संयोगिक (Random) प्रतिदर्श (Sample) रहा है, तब दोनों स्थितियों में विषयों के क्रमों का मान (Sum of Ranks) भी समान ही रहना चाहिए। अब यदि दोनों स्थितियों के क्रमों के मान में अन्तर है, तब उसकी सार्थकता की जाँच करना आवश्यक है। सार्थकता की जाँच के लिए दोनों स्थितियों में क्रमों के योग (Sum of Ranks) को देखना पड़ता है। जिस स्थिति में क्रमों का योग कम रहता है, उसके क्रमों के योग को $\overline{R}$ की संज्ञा दी जाती है। विलकॉक्सन ने एक ऐसी सारणी का निर्माण किया है, जिसमें 20 तक की संख्या (N) के लिए $\overline{R}$ के मान की सार्थकता की जाँच की जा सकती है। अब यदि दी गयी संख्या (N) पर प्राप्त $\overline{R}$ का सार्थकता के लिए आवश्यक मान के समान है, या फिर उससे कम है, तब ऐसा मान सार्थक रहता है। विस्तृत अध्ययन के लिए निम्नलिखित उदाहरण का अवलोकन कीजिए।

**उदाहरण 3. गति तथा शुद्धता (Speed and Accuracy) के लिए परीक्षण में 20 विद्यार्थियों को संयोगिक प्रतिदर्श के आधार पर चयन के पश्चात् दो समूहों—A तथा B में विभाजित किया गया। दोनों समूहों की दोनों स्थितियों की त्रुटियों के परिणाम नीचे दिये गये हैं।**

अध्ययनकर्त्ता ने यहाँ निराकरणीय परिकल्पना (Null Hypothesis) को अपने अध्ययन का आधार बनाया है। बताइये क्या अध्ययनकर्त्ता की परिकल्पना यहाँ सत्य है?

## तालिका 28

| त्रुटियाँ समूह A ($N_a$) | त्रुटियाँ समूह B ($N_b$) | क्रम समूह A ($R_a$) | क्रम समूह B ($R_b$) |
|---|---|---|---|
| 12 | 18 | 4 | 12 |
| 14 | 21 | 6·5 | 15 |
| 11 | 23 | 3 | 17·5 |
| 17 | 17 | 10·5 | 10·5 |
| 19 | 20 | 13 | 14 |
| 15 | 24 | 8 | 19 |
| 10 | 26 | 2 | 20 |
| 9 | 23 | 1 | 17·5 |
| 14 | 22 | 6·5 | 16 |
| 13 | 16 | 5 | 9 |
| | | $R_a = 59·5$ | $R_b = 150·5$ |

दोनों स्थितियों के क्रमों के योगों में से A स्थिति के क्रमों का योग कम है, अतएव इसे T की संख्या दी जाती है। यहाँ पर संख्या ($N_i$) 10 है। सार्थकता की जाँच के लिए आगे दी गयी तालिका 37 को देखते हैं, जिसके देखने से पता लगता है कि $\overline{T}$ का मान 10 की संख्या पर विश्वास के विभिन्न स्तरों पर निम्नलिखित होना चाहिए—

1% विश्वास के स्तर पर = 71

2% विश्वास के स्तर पर = 74

प्रस्तुत उदाहरण में प्राप्त $\overline{T}$ का मान (59·5) 1% विश्वास के स्तर पर दिये गये 71 के मान से कम है, जिससे स्पष्ट हो जाता है, कि दोनों स्थितियों के क्रमों में सार्थक अन्तर है। अतएव यहाँ निराकरणीय परिकल्पना (Null Hypothesis) को 1% विश्वास के स्तर पर अस्वीकृत (Reject) किया जाता है।

**टिप्पणी**—(1) यहाँ पर $(N_a = N_b) = N_i$ (Number in each Group)

(2) यहाँ पर दोनों स्थितियों के क्रमों का योग $= \frac{N(N+1)}{2}$

$$(R_a + R_b) = \frac{(N_a + N_b)(N_a + N_b + 1)}{2}$$

अथवा

$$= \frac{(10+10)(10+10+1)}{2}$$

$$= \frac{420}{2} = 210$$

(3) अब यदि $N_i$ की संख्या 20 से अधिक हो तब $\overline{R}$ का मान सार्थकता के लिए विश्वास के विभिन्न स्तरों पर निम्नलिखित गणना द्वारा ज्ञात किया जाना चाहिए—

5% विश्वास के स्तर पर $= \overline{R} - 19160\sqrt{\frac{N\overline{R}}{3}}$

2% विश्वास के स्तर पर $= \overline{R} - 2{\cdot}326\sqrt{\frac{N\overline{R}}{3}}$

1% विश्वास के स्तर पर $= \overline{R} - 2{\cdot}576\sqrt{\frac{N\overline{R}}{3}}$

यहाँ यह स्मरण रहे, कि प्राप्त $\overline{R}$ का मान सार्थकता के लिए दी गयी संख्या के दिये गये मान के समान, या फिर उससे कम रहना चाहिए।

(4) विभिन्न प्राप्तांकों को क्रम (Rank) प्रदान करने के लिए सबसे छोटी संख्या को क्रम 1 तथा उससे बड़ी को 2 तथा उससे बड़ी को 3 के आधार पर होना चाहिए।

## मन ह्विट्ने (Mann Whitney) य-टेस्ट (U-Test)

यह परीक्षण विधि बहुत कुछ संयुक्त-क्रम विधि (Composite Rank Method) के समान ही है। इसकी विशेषता यह है कि जब दो समूहों की संख्या (N) एक समान न होकर—अलग-अलग होती है, तब इस विधि का उपयोग किया जाता है। दूसरे, इस विधि के अन्तर्गत दोनों स्थितियों के क्रमों के योग के अन्तर की सार्थकता की जाँच क्रमों के मध्यमान से Z-विचलन (Z-Deviation) के आधार पर गणना की जाती है। स्पष्ट विवरण के लिए नीचे दिये गये उदाहरण को देखिये—

**उदाहरण 4. भूल भुलैया (Maze Learning) के प्रयोग को दो स्थितियों में 20 विद्यार्थियों के दो तुल्यात्मक समूहों (Matched Groups) समूह A (नियन्त्रित समूह—Control Group), समूह B (प्रायोगिक समूह—Experimental Group) में विभाजित किया गया। प्रयोग के अन्तर्गत प्रायोगिक समूह के दो विद्यार्थी कुछ कारणवश अपना प्रयोग पूरा न कर सके। प्रयोग की दोनों स्थितियों की त्रुटियाँ नीचे दी गयी हैं। बताइये क्या प्रयोग की दोनों स्थितियों के कारण यहाँ विद्यार्थियों की त्रुटियों (Errors) में सार्थक अन्तर देखने में आये हैं ?**

**तालिका 29**

| समूह A | समूह B | $R_a$ | $R_b$ |
|---|---|---|---|
| 17 | 29 | 5 | 16 |
| 16 | 21 | 3·5 | 9 |
| 18 | 32 | 6 | 18 |
| 19 | 30 | 7 | 17 |
| 16 | 23 | 3·5 | 11 |
| 15 | 26 | 2 | 14 |
| 25 | 24 | 13 | 12 |
| 20 | 22 | 8 | 10 |
| 14 | | 1 | |
| 28 | | 15 | |
| | | $\Sigma R_a = 64·0$ | $\Sigma R_b = 107$ |

**टिप्पणी**—(1) क्रम प्रदान करने के लिए सबसे छोटी संख्या (Smallest Number) को क्रम 1, उससे बड़ी संख्या को क्रम 2, तथा उससे बड़ी को क्रम 3 वाली पद्धति को अपनाया गया है।

(2) दोनों समूहों के क्रमों के योग (Sum of the Ranks of the two Groups) की शुद्धता की जाँच निम्नलिखित सूत्र द्वारा की जानी चाहिए—

$$\text{Sum of Ranks} = \frac{N(N+1)}{2} \qquad (\text{जबकि } N = N_1 + N_2)$$

$$= \frac{(N_1+N_2)(N_1+N_2+1)}{2}$$

$$= \frac{(10+8)(10+8+1)}{2}$$

$$= \frac{342}{2} = 171$$

प्रथम प्रतिदर्श में Z का मान ज्ञात करने का सूत्र निम्नलिखित है—

$$Z_a = \frac{2R_a - N_1(N+1)}{\sqrt{\frac{N_1N_2(N+1)}{3}}} \qquad \text{....सूत्र (10)}$$

तथा द्वितीय प्रतिदर्श में Z का मान—

$$Z_b = \frac{2R_b - N_2(N+1)}{\sqrt{\frac{N_1N_2(N+1)}{3}}} \qquad \text{....सूत्र (10 a)}$$

गणना किये हुए मानों को सूत्र में रखने पर—

$$Z_a = \frac{2\times 64 - 10(18+1)}{\sqrt{\frac{10\times 8\times 19}{3}}}$$

$$= \frac{128-190}{\sqrt{\frac{1520}{3}}} = \frac{-62}{\sqrt{506·67}}$$

$$= \frac{-62}{22·5} = -2·76$$



इसी प्रकार दूसरे प्रतिदर्श में $Z_b$-विचलन ($Z_b$ Deviation) का मान—

$$Z_b = \frac{2\times 107 - 8(18+1)}{\sqrt{\frac{10\times 8\times 19}{3}}}$$

$$= \frac{214 - 8\times 19)}{\sqrt{\frac{1520}{3}}} = \frac{214-152}{\sqrt{506·67}}$$

$$= \frac{62}{22·5} = +2·76$$

प्रसामान्य प्रसम्भाव्यता (Normal Probability) की सारणी A के देखने से ज्ञात होता है कि $+2·76\sigma$ तथा $-2·76\sigma$ के सीमान्तों (Ends) की दोनों ओर 0·0029 तथा 0·0029 स्थितियाँ (Cases) शेष रहती हैं, अथवा दोनों दिशाओं (धनात्मक + ऋणात्मक –) में (·0029 + ·0029) = ·0058 स्थितियाँ शेष रहती हैं। दूसरे शब्दों में, यहाँ P = 0·0058 के हैं, जोकि 0·01 विश्वास के स्तर से भी कम है। अतएव हम यहाँ 1% विश्वास के स्तर पर निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकृत (Reject) करते हैं, और यहाँ यह मानना पड़ेगा कि दोनों समूहों के क्रमों के मानों में सार्थक अन्तर हैं, अथवा यहाँ प्रयोग की भिन्न-भिन्न स्थितियों के कारण दोनों समूहों की त्रुटियों में सार्थक अन्तर उत्पन्न हुआ है।

**टिप्पणी**—(i) इस विधि का उपयोग उस स्थिति में किया जाना चाहिए जबकि दोनों समूहों की संख्या ($N_1 + N_2$) कम से कम 8 या इससे अधिक हो।

(ii) इस विधि का प्रयोग केवल कम आँकड़ों के लिए ही उपयोग में लाना चाहिए तथा जहाँ कहीं बड़े आँकड़े सरलतापूर्वक उपलब्ध हो सकें, वहाँ प्राचल विधि (Parametric Method) का ही उपयोग किया जाना चाहिए, क्योंकि प्राचल विधि का आधार अप्राचल विधि (Non-parametric Method) की अपेक्षा कहीं अधिक शक्तिशाली (Powerful) रहता है।

R के मान की सार्थकता की जाँच के लिए सारणी—जबकि R दोनों समूहों के क्रमों के योग में से अपेक्षाकृत कम मान होता है।

**तालिका 30**

| $N_i$ | P = ·05 | P = ·05 | P = ·01 |
|---|---|---|---|
| 5 | 18 | 16 | 15 |
| 6 | 27 | 24 | 23 |
| 7 | 37 | 34 | 32 |
| 8 | 49 | 46 | 44 |
| 9 | 63 | 59 | 56 |
| 10 | 79 | 74 | 71 |
| 11 | 97 | 91 | 87 |
| 12 | 116 | 110 | 105 |
| 13 | 137 | 130 | 125 |
| 14 | 160 | 152 | 147 |
| 15 | 185 | 176 | 170 |
| 16 | 212 | 202 | 196 |
| 17 | 241 | 230 | 223 |
| 18 | 271 | 259 | 252 |
| 19 | 303 | 291 | 282 |
| 20 | 338 | 324 | 315 |